Verbandstheorie und boolesche Algebren

Zusammenfassung

Aless Lasaruk

5. Dezember 2005

Zusammenfassung

Dieses Dokument enthält Fragen und Antworten zum Fach Verbandstheorie und boolsche Algebren. Die Fragen sind durch systematisches Durchgehen des gleichnamigen Skritpums entstanden, decken aber den Stoff nicht vollständig. Man beachte auch, dass die Antworten nicht exakt formuliert sind. Das Ziel der Formulierung ist das Minimieren der schriftlichen Antwort und Maximieren der mündlichen.

Inhaltsverzeichnis

1 Potenzmenge als algebraische Struktur

- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen einer Menge M und ihrer Potenzmenge $P(M)$?**

  Bei endlichen Mengen $|P(M)| = 2^{|M|}$. Bei unendlichen Mengen immernoch $|P(M)| > |M|$ nach Cantor.
- **Wie zeigt man die Beziehung $|P(M)| = 2^{|M|}$ für endliche Mengen M?**

  Durch Induktion über die Kardinalität. Wichtig ist die Konstruktionsvorschrift für Potenzmengen.
- **Wie kann man Elemente der *Potenzmenge* durch Funktionen charaktrerisieren?**

  Durch Auswahlfunktionen.
- **Welche Eigenschaften hat die Relation $\subseteq$?**

  Reflexiv, Transitiv, Antisymmetrisch.
- **Welche Eigenschaften besitzt $\subset$ im Gegensatz zu $\subseteq$ nicht?**

  Antisymmetrie und Reflexivität.

- **Welche Eigenschaften besitzten die Operationen $\cap$ und $\cup$ auf Mengen?**
  Idempotenz, Kommutativität, Assoziativität, Absorptionsgesetz, de Morgan, Distributivgesetz.
- **Wie kann man *Infimum* auf Mengensystemen festlegen?**
  Größte untere Schranke A. A ist Teilmenge jeder Menge. Für jede andere Menge B, die diese Eigenschaft erfüllt, gilt $B \subseteq A$.
- **Warum sind Infima und Suprema eindeutig, falls diese existieren?**
  Das folgt dierekt aus der Definition.
- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Bildung von Infima und der Schnittmengenrelation?**
  Infimum ist die Schnittmenge aller Teilmengen. Analog Supremum.
- **Was sagt das allgemeine Distributivitäsgesetzt aus?**
  Vereinigung von Schnitten eines Mengensystems ist gleich dem Schnitt der Vereinigung von Bildern aller Auswahlfunktionen.
- **Was braucht man für den Beweis des allgemeinen Distributivitätsgesetzes?**
  Im überabzählbaren Fall das Auswahlaxiom.
- **Was ist ein Abschlussoperator?**
  Eine Abbildung, die *inklusiv*, *monoton* und *idempotent* ist.
- **Kennen Sie Beispiele von Abschlussoperatoren?**
  Identität, Alles auf M, normaler Abschluss, lineare Hülle.
- **Was ist ein *topologischer Abschnussoperator*?**
  Ein Operator, bei dem die Abschluss der Vereinigung die Vereinigung der Abschlüsse ist und Abschluss leerer Menge leer ist.
- **Was ist ein *algebraischer Abschlussoperator*?**
  Eine Operator, bei dem der Abschluss einer Menge die Vereinigung der Abschlüsse endlicher Teilmengen ist.
- **Können Sie ein Beispiel eines topologischen Abschlussoperators geben?**
  Normaler Abschluss (nicht algebraisch), Identität.
- **Können Sie ein Beispiel eines algebraischen Abschlussoperators geben?**
  Lineare Hülle (nicht topologisch), Identität, Alles auf M.

2 Halbordnungen

- **Was ist eine *Halbordnung*?**
  Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation.
- **Was ist eine *Quasiordnung*?**
  Eine Relation, die nicht notwendigerweise antisymmetrisch ist.
- **Welche Halbordnungen kennen Sie?**
  Natürliche Ordnungen, Teilbarkeitshalbordnung, Potenzmengenhalbordnung.
- **Kennen sie eine Quasiordnung?**
  Ganze Zahlen mit der Teilbarkeit, Implikation.
- **Wie kann man aus jeder Quasiordnung eine Halbordnung machen?**
  Man identifiziert Elemente mit $a \leq b$ und $b \leq a$ und betrachtet die Relation auf Äquivalenzklassen.
- **Wie kann man Halbordnungen graphisch darstellen?**
  Durch Hasse-Diagramme.
- **Was ist eine Ordnung?**
  Halbordnung, in der es keine unvergleichbaren Elemente gibt.

- **Was ist eine *obere Schranke* einer Menge A?**
  Ein a mit $A \subseteq]-\infty, a]$.
- **Was ist ein *Supremum* einer Menge A?**
  Ein a mit $A \subseteq]-\infty, a]$, sodass für alle b mit $A \subseteq]-\infty, b]$ gilt $a \leq b$.
- **Was ist ein *größtes Element (max)* einer Menge A?**
  Ein a mit $A \subseteq]-\infty, a]$ mit $a \in A$.
- **Was ist ein *maximales Element* einer Menge A?**
  Ein $a \in A$, sodass für alle $b \in A$ gilt $a \not\leq b$.
- **Welche Beziehungen gelten zwischen den Begiffen obere Schranke, Supremum, größtes Element und maximales Element?**
  Größtes Element $\rightarrow$ Supremum $\rightarrow$ obere Schranke. Größtes Element $\rightarrow$ maximales Element. Alle anderen i.A. nicht.
- **Wie bezeichnet man größtes Elemenent bzgl. einer Halbordnung?**
  Mit der 1. (Kleinstes mit der 0.)
- **Was ist eine *Einschränkung*?**
  Einschränken der Relation durch Entfernen von Knoten aus dem Hasse Diagramm.
- **Was ist eine *Unterhalbordnung*?**
  Eine Halbordnung, die durch Einschränken entsteht.
- **Was ist eine *Teilhalbordnung*?**
  Eine Halbordnung, die durch Entfernen von Kanten aus dem Hasse Diagramm entsteht.
- **Kennen Sie Beispiele für Unterhalbordnungen?**
  $(\mathbb{Q}, \leq)$ von $(\mathbb{R}, \leq)$.
- **Kennen Sie Beispiele für Teilhalbordnungen?**
  $(\mathbb{N}^+, |)$ von $(\mathbb{N}^+, \leq)$.
- **Besitzten lineare Ordnungen *Erweiterung*en?**
  Nein. Eine Erweiterung A von B würde folgern, dass es ein Element mit $a \not\leq b$ in A und $a \leq b$ in B existiert. Daraus folgt aber wegen der Ordnungseigenschaft $b \leq a$ in A und somit $b \leq a$ in B, was mit $a = b$ gleichwertig ist und im Widerspruch zur Reflexivität von A steht.
- **Läßt sich jede Halbordnung zu einer Ordnung erweitern?**
  Ja. Man benötigt aber Auswahlaxiom oder Zorn'sches Lemma.
- **Welche Eigenschaften besitzen Ketten in $\mathrm{HO}(A)$?**
  Sie besitzen ein Supremum in $\mathrm{HO}(A)$. Man setzt einfach alle Kanten, die mindestens in einem Glied gesetzt sind.
- **Wie kann man bei zwei unvergleichbaren Elementen einer Halbordnung $\mathrm{HO}(A)$ diese so erweitern, sodass diese Elemente vergleichbar werden?**
  Seien c und d unvergleichbar. Man definiert die Erweiterungsordnung durch $a \leq' b$ gdw. $a \leq b \vee (a \leq c \wedge d \leq b)$. Wichtig: Wenn $a \not\leq b$ gilt, muss nicht $a \not\leq' b$ gelten.
- **Welche Eigenschaft erfüllen die maximalen Elemente in $\mathrm{HO}(A)$?**
  Das sind genau die Ordnungen auf A.
- **Wie kann man jede Halbordnung zu einer Ordnung erweitern im abzählbaren Fall?**
  Man erzeugt im abzählbaren Fall eine Kette von Halbordnungen, indem man einer Aufzählung der Elementenpaarw folgend unvergleichbare Elemente beseitigt. Eine solche Kette besitzt ein Supremum in der Menge der Halbordnungen. Dieses ist eine Ordnung.
- **Was sagt das *Zornsche Lemma* aus?**
  Wenn jede Kette von $(A, \leq)$ eine obere Schranke besitzt, so gibt es mindestens ein maximales Element in $(A, \leq)$.

- **Wie kann man jede Halbordnung zu einer Ordnung erweitern im überabzählbaren Fall?**

  Man betrachtet die Halbordnung B aller Oberhalbordnungen von $(A, \leq)$. Jede Teilkette der erhaltenen Halbordnung besitzt ein Supremum in $\mathrm{HO}(A)$ und somit in B. Somit gibt es in B nach Zornschen Lemma ein maximales Element $(A, \leq')$, welches eine Ordnung ist.

- **Was ist ein *Ordnungshomomorphismus*?**

  Eine monotone Abbildung zwischen Halbordnungen.

- **Was ist eine *Einbettung* zwischen Halbordnungen?**

  Es gilt $a \leq b$ gdw. $f(a) \leq f(b)$.

- **Was ist ein *Isomorphismus* zwischen Halbordnungen?**

  Eine surjektive Einbettung.

- **Welche Eigenschaften haben Einbettungen?**

  Einbettungen sind injektiv.

- **Ist jede monotone injektive Abbildung eine Einbettung?**

  Nein. Z.B. $(\mathbb{N}, |)$ auf $(\mathbb{N}, \leq)$.

- **Wie hängen die Eigenschaften für Halbordnungen und Unterhalbordnungen von Potenzmengen zusammen?**

  Jede Halbordnung auf M kann in eine Unterhalbordnung einer Potenzmenge von M eingebettet werden. Man definiert $f(a) =]-\infty, a]$.

- **Was kann man aus der Einbettung von Halbordnungen in Potenzmengen folgern?**

  Unterhalbordnungen von Potenzmengen sind typische Halbordnungen.

- **Was ist ein *Abschlusssystem*?**

  Für alle $a \in A$ hat jeder Schnitt $[a, \infty[\cap B$ ein kleinstes Element.

- **Wie kann man Abschlusssysteme bilden?**

  Für einen Abschlussoperator ist die Menge der Abschlüsse elementarer Mengen ein Abschlusssystem.

- **Wie kann man Abschlussoperatoren bilden?**

  Für jedes Abschlusssystem B ist $f(a) = \min([a, \infty[\cap B)$ ein Abschlussoperator.

- **Welche Abschlusssysteme gehören zu dem Abschlussoperator aus der Analysis und zur Bildung der linearen Hülle?**

  Abgeschlossene Mengen und Untervektorräume.

- **Wann ist eine Halbordnung (bedingt) vollsätndig?**

  Wenn für alle (beschränkten) Teilmengen ein Supremum und Infimum existieren.

- **Wie kann man vollständige Halbordnungen charakterisieren?**

  Äquivalent dazu sind: bedingt vollständig mit 0 und 1, jede Teilmenge besitzt ein Supremum, jede Teilmenge besitzt ein Infimum.

- **Was besagt der *Fixpunktsatz von Tarski*?**

  Jede monotone Abbildung auf einer vollständigen Halbordnung besitzt mindestens einen Fixpunkt und die Menge der Fixpunkte ist eine vollständige Halbordnung.

- **Wie kann man den Satz von Tarski beweisem?**

  Man betrachte $b = \inf(B = \{a \in A \mid f(a) \leq a\})$. Dann ist b ein Fixpunkt von f, weil einerseits für jedes a gilt $f(b) \leq f(a) \leq a$ und somit $f(b) \leq b$ (Infimum) und andererseits aus $f(b) \leq b$ folgt $f(f(b)) \leq f(b)$ und aus $f(b) \in B$ folgt $b \leq f(b)$.

- **Wie kann man den zweiten Teil des Satzes von Tarski beweisen?**

  Man zeigt, dass jede Teilmenge der Fixpunkte X ein Infimum besitzt. Wichtig ist dabei die Menge $Y = \{a \in A \mid x \leq f(a) \leq a \text{ für alle } x \in X\}$. Ihr kleinstes Element ist $\sup(X)$.

- **Was kann man mit Hilfe des Satzes von Tarski über monotone Abbildungen reeller Intervalle sagen?**

  Sie besitzen Fixpunkte.

- **Was kann man über Eigenschaften eines Abschlussoperators auf einer vollständigen Halbordnung aussagen?**

  Abschluss des Infumums ist kleiner als Infimum der Abschlüsse von Elementarteilmengen. Eine Teilmenge ist genau dann Abschlusssystem, wenn für alle Teilmengen ein Infimum in der Menge existiert.

- **Welche Eigenschaften hat die Unterhalbordnung einer vollständigen Halbordnung, wenn man sich nur auf Abschlüsse begrenzt?**

  Wieder eine vollständige Halbordnung. Für Teilmengen des Abschlusses ist das Infimumverhalten gleich. Supremum wird aus dem Abschluss des Supremums in der Oberordnung gebildet.

- **Was ist eine *Partitionshalbordnung*?**

  Eine Halbordnung auf Partitionen, bei der gilt: $a \leq b$ gdw. a ist eine Verfeinerung von b.

- **Welche Eigenschaften hat eine Partitionshalbordnung?**

  Sie ist eine vollständige Halbordnung. Infimum einer Menge von Partitionen sind Schnitte aller möglichen nichtleeren Kombinationen von Partitionselementen.

- **Wie nennt man die Anzahl von Partitionen einer Menge?**

  Die Bellsche Zahl.

- **Wie ist die Summe zweier Halbordnungen definiert?**

  Komponentenweises oder und zusätzlich wahr, wenn Elemente aus unterschiedlichen Halbordnungen.

- **Unter welchen Operationen erhält sich die Eigenschaft eine Ordnung zu sein?**

  Summen. Für Produkte nicht.

- **Kennen Sie Ordnungen, bei denen Produkthalbordnung keine Ordnung ist?**

  Gegenläufige Ordnungen, in denen $a \leq c$ und $b \geq d$, dann gilt weder $(a,b) \leq (c,d)$ noch umgekehrt.

- **Unter welchen Operationen erhält sich die Eigenschaft der Vollsätndigkeit?**

  Summen und Produkte. Infima sind bei Produkten die Paare der einzelnen Infima. Bei Summen $A + B$ ist $\inf(S) = \inf_B(S)$, falls $S \subseteq B$ und $\inf(S) = \inf_A(S \cap A)$ sonst.

3 Halbverbände und Verbände

- **Was ist ein *Halbverband*?**

  Ein halbverband ist eine Menge mit einer Abbildung, die Idempotent, Kommutativ und Assoziativ ist.

- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen Halbverbänden und Halbordnungen?**

  Man kann zwei Halbordnungen definieren durch $a \leq_\sqcap b$ gdw. $a \circ b = a$ und $a \leq_\sqcup b$ gdw. $a \circ b = b$. Dann gilt $a \circ b = \inf_\sqcap\{a,b\}$ und $a \circ b = \sup_\sqcup\{a,b\}$. Analog kann man für jede Halbordnung, bei der für zweielementige Teilmengen Suprema und Infima existieren zwei Halbverbände definieren mit $a \circ_\sqcap b = \inf\{a,b\}$ und $a \circ_\sqcup b = \sup\{a,b\}$.

- **Wie verhalten sich die Halbordnungen in Halbordnungsinduzierten Halbverbänden zueinander?**

  Es gilt $a \leq_\sqcap b$ gdw. $a \circ b = a$ gdw. $b \circ a = a$ gdw. $b \leq_\sqcup a$.

- **Was ist ein Infimums-/Supremumshalbverband?**

  $(A, \sqcap, \leq_\sqcap)$ bzw. $(A, \sqcup, \leq_\sqcup)$.

- **Wann stimmen die Halbordnungen zweier Infimums/Supremumshalbverbände über der selben Grundmenge überein?**

  Wenn die Absorptionsgesetze gelten.

- **Was ist ein *Verband*?**

  Eine Menge mit zwei Abbildungen, sodass die Menge mit beiden Abbildungen ein Halbverband ist und Absorptionsgesetze gelten.

- **Welche Zusammenhänge gelten in einem Verband für die induzierte Ordnung?**

  $a \leq b$ gdw. $a \sqcap b = a$ gdw. $a \sqcup b = b$. Es gilt weiter $a \sqcap b = \inf\{a, b\}$ und $a \sqcup b = \sup\{a, b\}$.
- **Wie kann man einen Verband aus einer gegebenen Halbordnung bilden?**

  Falls Infima und Suprema für zweielementige Mengen existieren, so setzt man $a \sqcap b = \inf\{a, b\}$ und $a \sqcup b = \sup\{a, b\}$.
- **Was ist als *Monotonie der Verbandsoperationen* zu verstehen?**

  $a \sqcap b \leq a' \sqcap b'$ und $a \sqcup b \leq a' \sqcup b'$, falls $a \leq a'$ und $b \leq b'$.
- **Was ist ein *Mengenhalbring*?**

  Ein unter $\cap$ bzw. $\cup$ abgeschlossene Mengensystem.
- **Welche allgemeinen Strukturen sind stets Verbände?**

  Vollständige Halbordnungen (*vollständiger Verband*), *Mengenringe*, Ordnungen.
- **Welche Eigenschaften haben endliche Verbände?**

  Vollständig.
- **Kennen Sie Unterhalbordnungen von Potenzmengen, die keine Mengenringe sind?**

  Z.B. abgeschlossene achsenparallele Rechtecke (Verbände, $\cap$-Mengenhalbringe), Kreisflächen (keine Mengenhalbringe, aber Verbände), $\mathbb{R}$-Unterräume.
- **Weleche zahlentheoretische Beispiele für Verbände kennen Sie?**

  $(\mathbb{N}, |)$ mit ggT und kgV.
- **Was ist ein *Unter(halb)verband*?**

  Substrukturen von Halb-/Verbänden.
- **Was ist bei der Definition von Unter(halb)verbänden durch Halbordnungen zu beachten?**

  Die Halbordnung der Unterstruktur muss lediglich eine Unterhalbordnung sein.
- **Wann ist ein Verband ein Unterverband bzgl. der Halbordnung?**

  Wenn die Halbordnung eine Unterhalbordnung des Verbandes ist (und Abschluss vorliegt).
- **Kennen Sie Beispiele von Unter(halb)verbänden?**

  Untermengen(halb)ringe. Bilder von Homomorphismen.
- **Ist jeder Verband auf einer Teilmenge der Potenzmenge ein Mengenring?**

  Nein. Man braucht nur M zu nehmen und einen isomorphen Mengenverband angeben. Dann ist es nicht distributiv aber jeder Mengenring ist es.
- **Was ist ein *Homomorphismus von (Halb-)Verbänden*?**

  $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$.
- **Was ist eine *Einbettung von (Halb-)Verbänden*?**

  Ein injektiver Homomorphismus.
- **Was ist ein *Isomorphismus von (Halb-)Verbänden*?**

  Eine surjektive Einbettung.
- **Was kann man über Bilder von (Halb-)Verbänden unter Einbettungen aussagen?**

  Diese sind Unter(halb-)verbände der Bildverbände.
- **Was kann man über Monotonie von Homomorphismen sagen?**

  Homomorphismen zwischen Infimums bzw. Supremumshalbverbänden sind monoton.
- **Ist jede monotone Abbildung ein Verbandshomomorphismus?**

  Nein. Natürliche Zahlen mit der Teilbarkeit.
- **Sind Ordnungsisomorphismen zwischen (Halb-)Verbänden speziell auch (Halb-)Verbandsisomorphismen?**

  Ja, weil sie Infima und Suprema erhalten.

- **Unter welchen Eigenschaften erhalten sich Infimums- und Supremumshalbverbände und somit Verbände?**

  Unter Summen und Produkten.

- **Sind $\cap$-Mengenringe typische Infimumshalbverbände?**

  Ja. Jeder Infimumsverband ist isomorph zu einem $\cap$-Mengenring. Isomorphismus ist $f(a) =]-\infty, a]$.

- **Sind $\cup$-Mengenringe typische Supremumshalbverbände?**

  Ja. Analog.

- **Sind Mengenringe typische Verbände?**

  Nein. Mengenringe erfüllen Distributivgesetze. Allgemeine Verbände nicht.

- **Kennen Sie einen Verband, in dem die Distributivgesetze nicht gelten?**

  (D) und (M).

- **Warum ist eine analoge Vorgehensweise der Repräsentation, wie bei Mengenhalbringen nicht bei distributiven Verbänden erfolgreich?**

  Wenn man a durch $]-\infty, a]$ darstellt, so bildet $\sqcup$ nicht auf die Vereinigung des Mengenringes ab (Gegenbeispiel: Raute mit 0 und 1).

- **Wann heißt eine Menge *separierend* für ein Infimumshalbverband?**

  S ist separierend, falls zu je zwei Elementen mit $a \not\leq b$ stets ein $c \in S$ existiert mit $c \leq a$ und $c \not\leq b$.

- **Wie kann man eine separierende Menge noch charakterisieren?**

  Für $a \neq b$ folgt $]-\infty, a] \cap S \neq]-\infty, b[\cap S$. Das entspricht der Injektivität der Abbildung $f_S(a) =]-\infty, a] \cap S$.

- **Wie kann man obige Beziehung beweisen?**

  Falls S separierend ist, so folgt aus $a \neq b$, dass mindestens eine der Eigenschaften $a \not\leq b$ oder $b \not\leq a$ gilt. Im ersten Fall gibt es ein $c \in S$ mit $c \leq a$ und somit $c \in]-\infty, a] \cap S$ und $c \not\leq b$ und somit $c \notin]-\infty, b]$. Dieses c ist in der Differenz der Mengen. Der andere Fall läuft analog.

- **Wie kann man einen beliebigen endlichen Infimumshalbverband repräsentieren?**

  Eine Abbildung $f_S(a) =]-\infty, a] \cap S$ ist genau dann eine Einbettung, wenn S separierend ist.

- **Welchen Sinn erfüllt also die Eigenschaft separierend?**

  Sie sorgt dafür, dass die Abbildung $f_S(a) =]-\infty, a] \cap S$ injektiv ist.

- **Wann ist ein Element $\sqcup$-*irreduzibel*?**

  $c \neq 0$ und für alle $a, b \in A$ gilt $c \leq a \sqcup b \rightarrow c \leq a \vee c \leq b$.

- **Wie kann man einen Verband durch irreduzible Elemente darstellen?**

  Die Abbildung $f_S(a) =]-\infty, a] \cap S$ ist genau dann ein Verbandshomomorphismus, wenn jedes $c \in S$ $\sqcup$-irreduzibel ist.

- **Welchen Sinn erfüllt die Eigenschaft $\sqcup$-irreduzibel?**

  Die Abbildung $f_S(a) =]-\infty, a] \cap S$ verträgt sich mit der $\cup$-Operation im Verband und im Mengenring.

- **Wann ist insgesamt also ein Verband isomorph zu einem Mengenring mit Hilfe $\sqcup$-irreduzibler Elemente?**

  Wenn die Menge der $\sqcup$-irreduziblen Elemente separierend ist.

- **Wann ist in einem Verband die Menge der irreduziblen Elemente separierend?**

  Wenn es endlich und distributiv ist. Zum Beweis wähle ein minimales c (geht wegen der Endlichkeit) mit $c \leq a$ und $c \not\leq b$. Dann ist c $\sqcup$-irreduzibel aufgrund der Distributivgesetze.

- **Welcher Zusammenhang besteht also zwischen endlichen und distributiven Verbänden und Mengenringen?**

  Jeder endliche distributive Verband ist isomorph zu einem Mengenring. Nämlich dem Untermengenring induziert durch die Abbildung $f_{\mathrm{Irr}}(a) =]-\infty, a] \cap \mathrm{Irr}$.

- **Kennen Sie ein Beispiel eines distributiven Verbandes, welches keine $\sqcup$-irreduziblen Elemente besitzt?**

  Mengenring der kofiniten Teilmengen einer unendlichen Menge (Komplement endlich).

- **Wie kann man einsehen, dass der Mengenring der kofiniten Elemente keine $\sqcup$-irreduziblen Elemente besitzt?**

  Man wähle eine unendliche Menge M. Angenommen C ist ein solches Element. Dann ist $M \setminus C = \{c_1, ..., c_n\}$ endlich. Man wähle neue Elemente $a, b \in M$ mit $\{a, b\} \cap C = \emptyset$. Setze $A = M \setminus \{a\}$ und $B = M \setminus \{b\}$. Dann ist $C \subseteq A \cup B = M$, aber keine Teilmenge von A bzw. B, denn $a \in C$ aber nicht in A bzw. $b \in C$ aber nicht in B.

- **Was kann man über die maximale Länge von Teilketten in einem endlichen distributiven Verband aussagen?**

  Ist gleich der Anazhl der irreduziblen Elemente plus 1. Man bildet eine bijektive Abbildung von Irr auf den Teil der Kette ohne $a_0 = 0$. Das funktioniert, weil es zu jedem Element der Kette ein irreduzibles Element gehört, welches "zwischen" zwei Elementen der Kette liegt. Es gibt höchstens eines, weil man sonst die Kette verlängern könnte.

- **Was ist ein *Ideal*?**

  Ein Ideal I ist eine nichtleere Teilmenge von A, sodass aus $a \in I$, $b \in A$ und $b \leq a$ folgt stets $b \in I$ und aus $a, b \in I$ folgt $a \sqcup b \in I$. Also robust gegenüber Verkleinerung und Supremumsbildung.

- **Was ist ein *Filter*?**

  Ein Filter F ist eine Teilmenge von A, sodass aus $a \in F$, $b \in A$ und $a \leq b$ folgt $b \in F$ und aus $a, b \in I$ folgt $a \sqcap b \in I$. Also robust gegenüber Vergrösserung und Infimumsbildung.

- **Wie kann man Ideale und Filter noch beschreiben?**

  Es gilt $x \in I/F$ und $y \in I/F$ gdw. $x \sqcup y \in I$ bzw. $x \sqcap y \in F$.

- **Was ist ein *Hauptideal*?**

  Ein Ideal der Form $]-\infty, c]$. Besitzt ein größtes Element.

- **Was ist ein *Hauptfilter*?**

  Ein Filter der Form $[c, \infty[$. Besitzt ein kleinstes Element.

- **Was ist ein *Primideal*?**

  Ein Primideal ist ein echtes Ideal in dem für alle $a, b \in A$ aus $a \sqcap b \in I$ folgt $a \in I$ oder $b \in I$.

- **Was ist ein *Primifilter*?**

  Ein Primfilter ist ein echter Filter in dem für alle $a, b \in A$ aus $a \sqcup b \in F$ folgt $a \in F$ oder $b \in F$.

- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen Primhauptfiltern und $\sqcup$-irreduziblen Elementen?**

  $[c, \infty[$ ist Primhauptfilter gdw. c ist $\sqcup$-irreduzibel.

- **Was versteht man i.A. unter *separierend*?**

  Eine Teilmenge S der echten Filter heißt separierend, falls für alle $a, b \in A$ mit $a \not\leq b$ ein $F \in S$ existiert, sodass $a \in F$ und $b \notin F$.

- **Wie kann man Verbände durch Primfilter repräsentieren?**

  Man bildet den Verband auf die Potenzmenge einer Teilmenge S der Primfilter, indem man jedem Element alle Primfilter in S zuordnet, in denen das Element vorkommt $f_S(a) = \{F \in S \mid a \in F\}$. Die Abbildung ist ein Verbandshomomorphismus und genau dann injektiv, wenn S separierend ist.

- **Was gilt in einem distributiven Verband bezüglich der Primfilter?**

  Die Menge der Primfilter ist separierend (*Trennungslemma*).

- **Wie beweist man das Trennungslemma?**

  Man zeigt, dass für disjunktes Ideal und Filter I und F existiert ein maximaler Filter F' mit $I \cap F' = \emptyset$, welcher ein Primfilter ist. Damit zeigt man analog zum endlichen Fall die Separiertheit, indem man zu $a \not\leq b$ ein Ideal $]-\infty, b[$ und einen Filter $[a, \infty[$ angibt.

- **Wie zeigt man, dass zu einem Ideal I und Filter F ein maximaler Filter F' existiert mit $I \cap F' = \emptyset$?**

  Vereinigung von Filtern ist ein Filter. Daher erfüllt eine Halbordnung der Erweiterungsfilter von F, die zu I disjunkt sind die Voraussetzung des Zornschen Lemmas. Daher existiert ein Maximales element F'.

- **Wie zeigt man, dass in obiger Aussage der Filter ein Primfilter ist?**

  Gelte $a \sqcup b \in F'$. Man Definiert zwei Erweiterungsfilter von F' mit $F_1 = \{d \mid \text{ex. } c \in F' \text{ mit } a \sqcap c \leq d\}$ und $F_2 = \{d \mid \text{ex. } c \in F' \text{ mit } b \sqcap c \leq d\}$. F_1 und F_2 sind Filter, die F' erweitern. Ist aber etwa $a \in F'$ aber $b \notin F'$, so gibt es aufgrund der Maximalität von F' Elemente im Schnitt von $F_1 \cap I$ und $F_2 \cap I$. Dann gilt aufgrund der Distributivität ein Widerspruch.

- **Was kann man aus dem Trennungslemma folgern?**

  Jeder distributive Verband ist isomorph zu einem Mengenring, wobei die Trägermenge eine Teilmenge der Potenzmenge der Primfilter ist.

4 Distributive und modulare Verbände

- **Was ist ein distributiver Verband?**

  Ein Verband, in dem Distributivgesetze zwischen den Operationen gelten.

- **Welche Gesetzmässigkeit ist für Distributivität entscheidend?**

  $a \sqcup (b \sqcap c) \geq (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$ und $a \sqcap (b \sqcup c) \leq (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$. Die andere Richtung gilt in jedem Verband.

- **Wie verhalten sich die Distributivgesetze in einem Verband zueinander?**

  Die sind äquivalent. Aus der Gültigkeit eines folgt die des anderen.

- **Was gilt weiterhin in einem distributiven Verband?**

  $a \sqcap (b \sqcup c) \leq (a \sqcap b) \sqcup c$.

- **Können Sie einige distributive Verbände nennen?**

  Mengenringe, Ordnungen, natürliche Zahlen mit Teilbarkeit, jeder Unterverband eines distributiven Verbandes.

- **Wie kann man Distributivität bei natürlichen Zahlen mit Teilbarkeit zeigen?**

  Man kann sie in einen Mengenring abbilden, denn die Primzahlenpotenzen sind sowohl separierend als auch $\sqcup$-irreduzibel. Ein weiterer Beweis kann durch Primzahlenzerlegung erbracht werden.

- **Unter welchen Eigenschaften erhält sich Distributivität bei Verbänden?**

  Unterverbände und direkte Produkte.

- **Kennen Sie nicht distributive Verbände?**

  D und M, Verband aller Unterräume von $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, abgeschlossene Reelle Intervalle.

- **Wie kann man distributive Verbände charakterisieren?**

  Ein Verband ist distributiv gdw. er nicht einen zu D oder M isomorphen Verband als Teilverband enthält.

- **Wie kann man die D/M Charakterisierung beweisen?**

  Jeder Verband, der D oder M enthält ist nicht distributiv. Für einen nicht distributiven Verband gilt $a \sqcap (b \sqcup c) \not\leq (a \sqcap b) \sqcup c$ für $a, b, c \in A$. Dann gibt es zwei Fälle: Verband ist nicht modular oder modular. Im ersten Fall enthält der Verband M mit

  $$0 = a \sqcap b, 1 = b \sqcup c, b' = b, a' = a \sqcap (b \sqcup c), c' = (a \sqcap b) \sqcup c$$

mit b' in der Mitte, a' oben und c' unten im Kreis. Falls der Verband modular ist, so muss er hingegen D enthalten mit

$$\begin{aligned}
0 &= (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c) \\
1 &= (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c) \\
a' &= (b \sqcap c) \sqcup (a \sqcap (b \sqcup c)) \\
b' &= (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap (a \sqcup c)) \\
c' &= (a \sqcap b) \sqcup (c \sqcap (a \sqcup b)).
\end{aligned}$$

Also 0 und 1 sind Suprema der Infima aller Kombinationen und der Rest sind alle zweier Kombinationen links vor $\sqcup$ und alle dreier Kombinationen rechts davon. Der restliche Beweis ist triviales Nachprüfen der Verbandsisomorphie.

- **Was ist ein *modularer Verband*?**

  Aus $a \geq c$ folgt $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$. D.h. Distributivität folgt nur für Elemente mit $a \geq c$.

- **Kennen Sie einen modularen Verband?**

  Verband aller Unterräume eines K-Vektorraumes.

- **Welche Operationen sind in dem Verband der Unterräume $\sqcap$ bzw. $\sqcup$?**

  Schnitt bzw. Hüller der Vereinigung.

- **Welche Isomorphieeigenschaft erfüllen modulare Verbände bezüglich der Intervalle $[a, a \sqcup b]$ und $[a \sqcap b, b]$?**

  Diese sind isomorph. $f : [a, a \sqcup b] \rightarrow [a \sqcap b, b]$ mit $f(x) = x \sqcap b$ ist ein Isomorphismus ($f^{-1}(x) = x \sqcup a$).

- **Wie zeigt man Verbandsisomorphie?**

  Ordnungstreue ist eine gute Lösung.

- **Was kann man über maximale Ketten in modularen Verbänden sagen?**

  Die maximalen Ketten in einem endlichen modularen Verband sind gleich lang.

- **Wie beweist man den Satz über gleichlange Ketten in modularän Verbänden?**

  Induktion und Fallunterscheidung im Induktionsschritt nach der Gleichheit erster (nicht 0) Elemente. Falls die Elemente gleich sind, so kann man mit $[a_1, 1]$ nach Induktionsvoraussetzung fortfahren. Sonst gilt wegen der Maximalität der Ketten $a_1 \sqcap b_2 = 0$. Man wähle eine maximale Kette M des Verbandes $[a_1 \sqcup b_1, 1]$. Dann ist $\{a_1\} \cup M$ und $\{a_1, ..., a_n\}$ maximale Unterketten des Verbandes $[a_1, 1]$. Analoges gilt für $\{a_1\} \cup M$. Nach i.A. folgt dann $m = n$.

- **Wie lang ist eine maximale Kette im Verband aller Unterräume eines Vektorraumes der Dimension d?**

  $d + 1$. Man kann eine maximale Kette angeben. Alle anderen sind dann gleich lang.

5 Pseudokomplemente und Komplemente

- **Wann heißen Elemente eines Halbverbandes mit kleinstem Element *disjunkt*?**

  Wenn $a \sqcap b = 0$ gilt.

- **Was ist ein *Pseudokomlement*?**

  b ist ein Pseudokomplement zu a, wenn $a \sqcap b = 0$ und b das größte und allen Elementen mit dieser Eigenschaft. D.h. für jedes c mit $c \sqcap a = 0$ gilt $c \leq b$.

- **Was ist ein *Komlement*?**

  In einem Verband mit 0 und 1 heißt a Komplement zu b, wenn $a \sqcap b = 0$ und $a \sqcup b = 1$.

- **Was braucht man also zur Definition eines Komplements?**

  Einen Verband mit 0 und 1.

- **Wie viele Pseudokomplemente besitzt ein Element in einem beliebigen Verband?**

  Höchstens eins.

- **Kann man obiges auch über Komplemente aussagen?**
  Nein. In D z.B. gibt es mehrere.
- **Wie viele Pseudokomplemente bzw. Komplemente besitzt ein Element in einem distributiven Verband?**
  Höchstens eins jeweils.
- **Welche Eigenschaften besitzen Pseudokomplemente in distributiven Verbänden?**
  Maximal unter allen disjunkten Elementen, endliche Verbände sind pseudokomplementiert, jedes Komplement ist auch ein Pseudokomplement.
- **Kennen Sie pseudokomplementierte aber nicht komplementierte Verbände?**
  Raute mit strich nach oben.
- **Kennen Sie komplementierte aber nicht pseudokomplementierte Verbände?**
  D.
- **Sind Komplemente im Allgemeinen in beliebigen Verbänden eindeutig?**
  I.A. nicht in D sind sie es nicht.
- **Wann sind Ordnungen komplementiert?**
  Genau dann, wenn $|A| \leq 2$. Sonst nur pseudokomplementiert.
- **Was ist eine *boolesche Algebra*?**
  Ein distributiver komplementierter Verband mit 0 und 1.
- **Was kann man über elementare Eigenschaften von Komplementen aussagen?**
  Je mehr man voraussetzt, desto ähnlicher wird es der üblichen booleschen Algebra mit true und false.
- **Wie kann man boolesche Algebren charakterisieren?**
  Distributiver Verband mit 0 und 1, in dem $a \sqcap a^* = 0$ und $a \sqcup a^* = 1$.
- **Wie kann man durch Pseudokomplement einen Abschlussoperator definieren?**
  $\overline{a} = a^{**}$
- **Welches Abschlussystem gehört dazu?**
  $\overline{A} = \{a^* \mid a \in A\}$. Weil $a = b^*$ gdw. $a = (b^*)^{**}$. Man braucht also nur ein mal pseudokomplementieren.
- **Wann heißt ein Abschlussoperator additiv bzw. multiplikativ?**
  Wenn gilt $\overline{a \sqcup b} = \overline{a} \sqcup \overline{b}$, analog mit $\sqcap$ für multiplikativ.
- **Welche Struktur bildet $\overline{A}$ für einen Verband?**
  Verband mit alter $\sqcap$ und $\overline{a}\,\overline{\sqcup}\,\overline{b} = \overline{\overline{a} \sqcup \overline{b}}$.
- **Wann ist $\overline{A}$, wie oben, ein Unterverband von A?**
  Genau dann, wenn der Abschlussoperator additiv ist.
- **Was sagt der *Satz von Glivenko* aus?**
  Für einen Halbverband mit Pseudokomplement bildet A^* mit $a^* \sqcup b^* = (a \sqcap b)^*$ eine boolesche Algebra.
- **Wie beweist man den Satz von Glivenko?**
  Ist im Wesentlichen das Nachrechnen der Axiome.
- **Was kann man aus dem Satz von Glivenko folgern?**
  Abschlussverband und Verband mit Komplementen stimmen für einen distributiven Verband mit Pseudokomlement überein.
- **Wie kann man aus einem vollständigen distributiven Verband eine boolesche Algebra konstruieren?**
  Zu A^* übergehen. Dann ist die Algebra sogar vollständig.

6 Boolesche Algebren

- **Welche booleschen Algebren kennen Sie?**

  Potenzmengenalgebra, *Mengenkörper* (Mengenring mit 0 und 1 und abgeschlossen unter Komplement), *Algebra der regulär offenen Mengen*, *Algebra der Offenabgeschlossenen mengen*, Endliche boolesche Algebren (Punkt, Gerade, Raute, Würfel), Teiler einer quadratfreien Zahl mit KGV und GGT.

- **Wie kann man eine Topologie zu einem Verband machen?**

  Supremum ist die Vereinigung, Infimum ist das Innere des Schnittes (also größte offene Menge, die noch in den Schnitt reinpasst), Komplement ist das Innere des Mengenkomplementes.

- **Welche Eigenschaften hat eine Topologie als Verband?**

  Distributiv (Mengenring), vollständig und Pseudokomplementiert.

- **Wieso ist die Topologie als Verband nicht i.A. kopmlementiert?**

  Etwa in $\mathbb{R}$ ist das Pseudokomplement zu $]0,1[$ die Menge $]-\infty,0[\cup]1,\infty[$, aber in der Vereinigung fehlen 0 und 1.

- **Welche Eigenschaften hat das System der abgeschlossenen Mengen?**

  Analog dazu bildet das einen distributiven vollständigen Verband.

- **Warum ist das System der abgeschlossenen Mengen i.A. nicht pseudokomplementiert?**

  Etwa in $\mathbb{R}$ besitzt $\{1\}$ keine grösste abgeschlossene Menge M mit $\{1\} \cap M = \emptyset$, denn für jede Abgeschlossene Menge $1 \notin N$ und minimaler Rand a passt noch eine Kugel mit $(a+1)/2$ mit Radius $|a-1|/2$ rein.

- **Wie kann man aus dem topologischen Verband eine boolesche Algebra machen?**

  Indem man nach Satz von Glivenko auf den Komplementraum übergeht.

- **Wann ist ein (halb)Verband ein *Unter(halb)verband mit Pseudokomplement*?**

  Wenn der (halb)Verband ein Unter(halb)verband ist und die Auswertungen der Pseudokomplemente übereinstimmen.

- **Kennen Sie ein Beispiel, in dem ein Unterverband die Eigenschaft des Pseudokomplements verloren geht?**

  Offene Mengen in $\mathbb{R}$ ist ein Unterverband des Potenzmengenverbandes. Beide sind pseudokomplementiert. Aber die Auswertungen der Komplemente unterscheiden sich.

- **Wann ist ein Unterhalbverband pseudokomplementiert?**

  Wenn die 0 enthalten ist und wenn er unter Pseudokomplement abgeschlossen ist.

- **Was ist eine *Subalgebra*?**

  Eine Unterverband, der 0 und 1 enthält ist genau dann komplementiert, wenn er unter Komplement abgeschlossen ist. Dann heißt der Unterverband eine Subalgebra.

- **Was ist ein Homomorphismus ein Verbandshomomorphismus von Verbänden mit Pseudokomplement bzw. booleschen Algebren?**

  $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f(a^*) = f(a)^*$. Also, wie üblich.

- **Sind Verbandsisomorphismen zwischen Verbänden mit Pseudokomplement auch Isomorphismen von Verbänden mit Pseudokomplement?**

  Ja.

- **Gilt obiges für Einbettungen?**

  Nein.

- **Wie kann man Homomorphismen zwischen booleschen Algebrech beschreiben?**

  Jeder Homomorphismus mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ ist es.

- **Was ist ein *Atom* einer booleschen Algebra?**

  Ein Atom ist minimal bzgl der Halbordnung $(A \setminus \{0\}, \leq)$.

- **Wann heißt eine boolesche Algebra atomar?**
  Wenn zu jedem Element ein Atom existiert.
- **Welche Eigenschaften haben Atome?**
  Atome sind genau die $\sqcup$-irreduzibele Elemente. Für Atome sind $[a, \infty[$ genau die maximalen echten Filter.
- **Kennen Sie eine Charakterisierung einer atomaren Algebra mit Hilfe separierender Elemente?**
  Boolesche Algrbea ist genau dann atomar, wenn die Menge der Atome separierend ist.
- **Was kann man über eine Teilmenge S der Potenzmenge aussagen, welche alle elementaren Teilmengen enthält und ein Mengenring ist?**
  Sie enthält alle endlichen Teilmengen. Wenn S ein Mengenkörper ist, so sind auch die koendlichen Teilmengen enthalten. Für endliche Grundmengen ist $S = P(M)$.
- **Wie kann man eine atomare boolesche Algebra einbetten?**
  Man wähle als S alle Atome. Dann ist die Abbildung f_S in $(P(S), \cap, \cup, \emptyset, S, \sim, \subseteq)$ eine Einbettung.
- **Was kann man dann über das Bild der Einbettung aussagen?**
  Das Bild ist ein Mengenkörper.
- **Wie kann man eine endliche boolesche Algebra einbetten?**
  Die Abbildung f_S ist sogar ein Isomorphismus.
- **Was kann man also über die Kardinalität einer endlichen booleschen Algebra aussagen?**
  Sie hat 2^n Elemente.
- **Wie kann man also endliche boolesche Algebren charakterisieren?**
  Alle endlichen booleschen Algebren mit 2^n Elementen sind bis auf Isomorphie gleich. Die "kanonische" boolesche Algebra ist die Potenzmenge von $\{1, ..., n\}$.
- **Wann ist eine beliebige boolesche Algebra isomorph zu einer Potenzmengenalgebra?**
  Genau dann, wenn sie vollständig und atomar ist.
- **Was sind Atome in einer booleschen Potenzmengenalgebra?**
  Das sind einelementige Mengen.
- **Wie beweist man den Charakterisierungssatz für Potenzmengenalgebren?**
  Eine Richtung ist trivial, denn jede Potenzmenge ist atomar und vollständig. Die Eigenschaften bleiben unter Isomorphie erhalten. Für die andere Richtung muss man zeigen, dass das Bild des Mengenkörpers, zu dem die Algebra isomorph ist, Potenzmenge als Träger hat.
- **Wie kann man eine beliegibe boolesche Algebra einbetten?**
  Für eine separierende Teilmenge der Primfilter ist f_S eine Einbettung. Analog zum allgemeinen Fall ist die Voraussetzung für die Menge aller Primfilter stets erfüllt.
- **Zu welcher Struktur ist also jede boolesche Algebra isomorph?**
  Zu einem Mengenkörper.
- **Wie kann man den Mengenkörper für die Primfilterrepräsentation charakterisieren?**
  Der ist eine Basis einer Topologie derart, dass der topologische Raum ein boolescher Raum ist (*Stonescher Repräsentationssatz*).
- **Was ist ein *boolescher Raum*?**
  Ein boolescher Raum besitzt eine Basis für das System von offenen Mengen, sodass alle Basismengen offen-abgeschlossen sind.

7 Dualität

- **Was ist eine *duale Halbordnung*?**
  Wenn man $\leq$ durch $\geq$ ersetzt.
- **Wie entstehen duale Begriffe aus dem Bereich der Halbordnungen?**
  Indem man in der Definition $\leq$ durch $\geq$ ersetzt.
- **Wie dualisiert man Aussagen?**
  Indem man definierte Begriffe durch die Definitionen ersetzt und alles dualisiert.
- **Was kann man über Gültigkeit der Aussagen in dualen Halbordnungen sagen?**
  Eine Aussaage gilt genau dann, wenn die duale Aussage in der dualen Halbordnung gilt.
- **Wann heißt eine Aussage *selbstdual*?**
  Wenn die duale Aussage zu der Aussage äquivalent sind.
- **Wann heißt ein Begriff selbstdual?**
  Wenn seine Definition eine selbstduale Aussage ist.
- **Kennen Sie duale Begriffe und Aussagen?**
  Infimum und Supremum, Minimum und Maximum, 0 und 1, $a \sqcap b$ und $a \sqcup b$, $\sqcup$-/$\sqcap$-Irreduzibel, Ideal und Filter.
- **Kennen Sie selbstduale Begriffe und Aussagen?**
  Verband, distributiver Verband, b ist Komplement von a, boolesche Algebra.
- **Wann heißt eine Klasse selbstdual?**
  Wenn duale Aussagen beide enthalten sind.
- **Kennen sie selbstduale Klassen?**
  Verbände, modulare Verbände, distributive Verbände, boolesche Algebren.
- **Kennen sie nicht selbstduale Klassen?**
  Z.B pseudokomplementierte Verbände.
- **Wann ist eine Halbordnung selbstdual?**
  Wenn sie zu ihrer dualen Ordnung isomorph ist.
- **Kennen Sie selbstduale Halbordnungen?**
  Ordnungen, boolesche Algebren.
- **Wie bildet man bei endlichen Halbordnungen die duale Ordnung?**
  Man spiegelt das Hasse-Diagramm.
- **Was nützt der Begriff der Selbstdualität?**
  Man muss Aussagen nur für einen der dualen Partner zeigen.

8 Boolesche Terme und Funktionen

- **Wann heißen zwei boolesche Terme äquivalent?**
  Wenn sie in jeder booleschen Algebra die selbe Funktion bilden.
- **Was ist eine *augezeichnete DNF/KNF*?**
  Wenn alle Variablen in allen Termen vorkommen, höchstens einmaliges Komplementieren vorhanden ist und die Terme bezüglich der Komplemente lexikographisch angeordnet sind.
- **Welche Eigenschaften erfüllt die ausgezeichnete DNF?**
  Zu jedem booleschen Term gibt es eine eindeutige äquivalente DNF/KNF in ausgezeichneter Normalform.
- **Wie bekommt man die ausgezeichnete Normalform?**
  Indem man zunächst eine Normale bildet und dann Regeln anwendet: Wenn Variablen nicht auftauchen dupliziert man die Terme, indem man $(x \sqcup x^*)$ disjunktiv ranmultipliziert. Ansonsten entfernt man Variablen mit gleichem Exponenten und Terme mit Variablen mit verschiedenen Exponenten.

- **Wie zeigt man die Eindeutigkeit?**
  Indem man die Eindeutigkeit für die zweielementige boolesche Algebra zeigt.
- **Was ergibt sich die zweielementige boolesche Algebra aus der Eindeutigkeit der DNF/KNF?**
  Zwei Terme sind genau dann äquivalent, wenn ihre DNF/KNF übereinstimmen.
- **Wie viele boolesche Funktionen gibt es also?**
  2^{2^n} verschiedene n-stellige boolesche Funktionen, weil die Anzahl verschiedener DNF 2^{2^n} ist.
- **Wann heißt ein System boolescher Gleichungen allgemeingültig?**
  Wenn es in allen booleschen Algebren gilt.
- **Wann heißen zwei Systeme boolescher Gleichungen äquivalent?**
  Wenn in jeder booleschen Algebra entweder beide Systeme allgemeingültig oder nicht sind.
- **Wann ist eine boolesche Gleichung allgemeingültig?**
  Wenn die Terme äquivalent sind.
- **Wie kann man Systeme von booleschen Gelichungen auf eine Gleichung reduzieren?**
  Man definiert $x\Delta y$ als $(x \sqcap y^*) \sqcup (x^* \sqcap y)$. Man kann also $x = y$ in $x\Delta y = 0$ umformen und ein System der Form $t_i = 0$ in $t_1 \sqcup ... \sqcup t_n = 0$.
- **Wann ist ein System von booleschen Gleichungen allgemeingültig?**
  Genau dann, wenn es in der zweielementigen booleschen Algebra gilt.
- **Warum kann man von *der* zweielementigen booleschen Algebra sprechen?**
  Weil es bis auf Isomorphie genau eine mit 2 Elementen gibt.
- **Wie kann man das Komplement eliminieren?**
  Jedes Gleichungssystem ist äquivalent zu einem System von Ungleichungen der Form $\sqcap x_i \leq \sqcup x_i$.
- **Wann ist ein System von Ungleichungen in obiger Form allgemeingültig?**
  Genau dann, wenn es nur $0 = 0$ enthält.
- **Wie beweist man obige Aussage?**
  Disjunktive Normalform, Partitionieren der Konjunktionen in normale Konjunktionen und Komplemente und Anwendung von Regeln von de Morgan.
- **Wie kann man Systeme auf eine Form bezüglich einer ausgezeichneten Variablen bringen?**
  Indem man sich die Gleichungen in einem System anschaut.
- **Was ist ein boolescher Ring?**
  Ein Ring in dem $a^2 = a$ gilt.
- **Was gilt in einem booleschen Ring für die Summe $a + a$?**
  $a + a = (a + a)^2 = a^2 + 2a^2 + a^2 = a + a + a + a$ also $a + a = 0$.
- **Wie kann man aus einem booleschen Ring eine boolesche Algebra machen?**
  $a \sqcap b = a \cdot b$, $a^* = 1 + a$, $a \sqcup b = a + b + a \cdot b$ und $a \leq b$ gdw. $a \cdot b = a$.
- **Wie kann man eine boolesche Algebra zu einem booleschen Ring machen?**
  $a \cdot b = a \sqcap b$, $-a = a$, $a + b = a\Delta b$.
- **Wie kann man Schaltnetze durch boolesche Funktionen beschreiben?**
  Man fixiert zwei Anschlüsse. Dann lifert der Rest eine Abhängigkeit von den Schalterpositionen und den Werten an den Anschlüssen eine Funktion.
- **Was ist eine monotone Schaltfunktion?**
  Wenn für $a_i \leq a'_i$ die Funktion $f(..., a_i, ...) \leq f(..., a'_i, ...)$.
- **Was kann man über den Aufbau von Netzen mit monotonen Funktionen aussagen?**
  Es gibt Netze aus gekoppelten Ausschaltern, die die Funktion realisieren.

- **Wie bildet man anhand von Netzfunktionen Schaltnetze?**
  Als Serien-Parallelgraphen von gekoppelten Schaltern.
- **Ist ein System nach obiger Konstruktion minimal?**
  Nein.
- **Wie kann man monotone Funktionen charakterisieren?**
  Die Ausgezeichnete DNF enthält keine $*$-Anwendung.

9 Quotientenalgebren, Erzeugende und freie boolesche Algebren

- **Was erhält sich bei der Anwendung von Homomorphismen zwischen booleschen Algebren?**
  Gleichheit der Termauswertungen $h(t(a_1, ..., a_n)) = t(h(a_1), ..., h(a_n))$, boolesche Gleichungen und Systeme boolescher Gleichungen.
- **Wie stehen obige Aussagen zur Aussage h ist Homomorphismus?**
  Alle obigen Aussagen sind Äquivalent.
- **Wie kann man homomorphe Bilder einer booleschen Algebra A beschreiben?**
  Bis auf Isomorphie mit Hilfe von Idealen von A.
- **Wie kann man mit Hilfe eines Ideals eine Kongruenzrelation erzeugen?**
  $a \sim_I b$ gdw. $a\Delta b \in I$. Also symmetrische Differenz ist in I.
- **Welche Struktur bildet für ein Ideal I der Raum A/I?**
  Eine boolesche Algebra, Quotientenalgebra modulo I. Die Operationen sind wohldefiniert.
- **Wie beweist man obige Aussage?**
  Man zeigt, dass der kanonische surjektive Homomorphismus die Axiome für boolesche Algebren, die als Gleichungen geschrieben werden können, erhält.
- **Was ist der *Kern* $Kern(h)$ für einen Homomorphismus h zwischen booleschen Algebren?**
  Alles, was auf 0 abgebildet wird.
- **Welche wichtige Bedingung gilt für gleiche Bilder eines Homomorphismus?**
  Es gilt $h(a) = h(b)$ gdw. $h(a)\Delta h(b) = 0$ gdw. $a\Delta b \in Kern(h)$.
- **Welche Struktur haben Kerne von Homomorphismen?**
  Das sind Ideale.
- **Wann ist ein Kern eines Homomorphismus ein echtes Ideal und wann ein Primideal?**
  Jeweils genau dann, wenn das Bild nicht $\{0\}$ ist bzw. das Bild $\{0, 1\}$ ist und in der Bildalgebra $0 \neq 1$ gilt.
- **Was besagt der *Homomorphiesatz*?**
  Es gibt genau einen Homomorphismus von $A/_{Kern(h)}$ nach B mit $h = l \circ k$ (k ist der kanonische Homomorphismus). Die Fortsetzung ist ein Isomorphismus gdw. h surjektiv ist.
- **Was verwendet man zum Beweis des Homomorphiesatzes?**
  Den Satz über Faktorisierung von Homomorphismen. Existenz eines Homomorphismus l mit $l \circ k = h$ ist gegeben, falls $Kern(k) \subseteq Kern(h)$.
- **Welche zentrale Beobachtung läßt den Homomorphiesatz auf den Satz über Faktorisierung von Homomorphismen zurückführen?**
  Die einzige vernünftige Definition von l ist $l(k(a)) = h(a)$. Es gilt $a = b$ gdw. $a\Delta b = 0$. Für die Wohldefiniertheit muss gelten $k(a) = k(b) \rightarrow h(a) = h(b)$ und somit $a\Delta b \in Kern(k) \rightarrow a\Delta b \in Kern(h)$.

- **Wie kann man boolesche Algebren aus vorhandenen Verbänden erzeugen?**
  Durch Erzeugendensysteme und durch Verbände.
- **Wie kann man boolesche Algebren aus Teilmengen erzeugen?**
  Man nimmt eine Teilmenge C des Trägers und sammelt Auswertungen aller boolescher Terme mit Werten in C.
- **Wie nennt man eine mit Hilfe einer Teilmenge C erzeugte boolesche Algebra?**
  Die von C erzeugte Subalgebra. C heißt dann ein *Erzeugendensystem*.
- **Wie kann man Abbildungen zu Homomorphismen fortsetzen?**
  Wenn A' eine in A von C erzeugte Subalgebra ist und $f : C \to B$ eine Abbildung ist, so gibt es eine Fortsetzung von f zu einem Homomorphismus $\overline{f} : A' \to B$ gdw. für jedes System boolescher Gleichungen $A \models G(c_1, ..., c_n)$ folgt $B \models G(f(c_1), ..., f(c_n))$.
- **Welche Fortsetzung verwendet man dabei?**
  $\overline{f}(t^A(c_1, ..., c_n)) = t^B(f(c_1), ..., f(c_n))$.
- **Was muss gelten, damit obiger Ausdruck wohldefiniert ist?**
  Aus der Gleichheit der Auswertungen zweier Terme muss Gleichheit der Auswertungen der Terme auf Bilder von f gelten. Also aus $t_1^A(c_1, ..., c_n) = t_2^A(c_1, ..., c_n)$ folgt $t_1^B(f(c_1), ..., f(c_n)) = t_2^B(f(c_1), ..., f(c_n))$.
- **Was muss gelten, damit die Fortsetzung eine Einbettung ist?**
  $A \models G(c_1, ..., c_n)$ gdw. $B \models G(c_1, ..., c_n)$
- **Was muss gelten, damit die Fortsetzung surjektiv ist?**
  Das Bild von C unter f muss B erzeugen.
- **Wie kann man boolesche Algebren aus Verbänden erzeugen?**
  Für einen distributiven Verband A mit 0 und 1 gibt es eine boolesche Algebra, die von A erzeugt wird.
- **Wie funktioniert die Erzeugung?**
  Es gibt aufgrund der Einbettbarkeit in einen Mengenring eine erweiterungsalgebra D von A. Man wählt die Subalgebra, die von A in D erzeugt wurde.
- **Wie verhalten sich zwei von einem Verband erzeugte boolesche Algebren?**
  Die sind isomorph zueinander. Daher heißt die Erweiterung *der boolesche Abschluss*.
- **Wann ist eine Algebra frei erzeugt?**
  Eine Algebra A heißt frei erzeugt von C, falls jede Abbildung $f : C \to B$ in eine booleschen Algebra B zu einem Homomorphismus von A nach B erweitert werden kann.
- **Was ist eine *freie Algebra*?**
  Falls diese Algebra ein freies Erzeugendensystem besitzt.
- **Wie kann man freie Algebren durch Auswertungen boolescher Systeme beschreiben?**
  A ist frei von C erzeugt, gdw. für alle paarweise verschiedenen Werte $c_1, ..., c_n \in C$ und für jedes System boolescher Gleichungen folgt aus $A \models G(c_1, ..., c_n)$, dass G allgemeingültig ist.
- **Wie kann man obigen Satz beweisen?**
  Sei A frei von C erzeugt. Man wähle ein System $A \models G(c_1, ..., c_n)$ und seien $b_1, ..., b_n$ beliebig. Dann kann man eine Abbildung $f(c_i) = b_i$ wählen und $f(c) = b_1$ sonst. Diese lässt sich zu einem Homomorphismus erweitern. Somit gilt $B \models G(b_1, ..., b_n)$ und somit ist G allgemeingültig. Umgekehrte Richtung erledigt man mit dem Fortsetzungssatz über Homomorphismen.
- **Was kann man über die Existenz und Eindeutigkeit von freien booleschen Algebren aussagen?**
  Zu jeder Menge C existiert eine von C frei erzeugte boolesche Algebra. Je zwei solche Algebren sind isomorph über C.

- **Wie zeigt man die Eindeutigkeit im obigen Satz?**
  Angenommen A und B sind frei erzeugt von C. Man setze die Identität auf C zu einem Isomorphismus auf A und B fort.
- **Wie zeigt man die Existenz im obigen Satz?**
  Die Idee ist es die Menge C als Variablen von booleschen Termen zu betrachten. Man bildet Äquivalenzklassen von Termen mit $t_1 \sim t_2$ gdw. $t_1 = t_2$ allgemeingültig ist. Die Quotientenalgebra $T(C)/_\sim$ ist eine boolesche Algebra.
- **Warum ist die konstruierte Algebra im obigen Satz von C erzeugt?**
  Jeder Variablen in C entspricht eine Äquivalenzklasse von Termen.
- **Wie viele Elemente hat eine von einer endlichen Menge frei erzeuge boolesche Algebra?**
  Für $|C| = n$ gilt $|A| = 2^{2^n}$, da dies gerade die Anzahl verschiedener nichtäquivalenter boolescher Terme ist.
- **Was folgt für andere erzeugte Algebren bezüglich ihrer Kardinalität?**
  Für $|C| = n$ gilt für eine von C erzeugte Algebra A offenbar $|A| \leq 2^{2^n}$, da ein Homomorphismus existiert von einer von C erzeugten freien Algrbra auf A.
- **Was kann man insgesamt über endliche boolesche Algebren aussagen bezüglich freier Erzeugung?**
  Genau dann frei, wenn die Kardinalität 2^{2^n} ist.
- **Wie kann man obigen Satz beweisen?**
  Eine Richtung ist trivial. Die andere ergibt sich aus der Eindeutigkeit bis auf Isomorphie von zwei endlichen booleschen algebren.
- **Wann heißt eine boolesche Algebra atomfrei?**
  Wenn sie keine Atome besitzt.
- **Kennen Sie ein Beispiel einer atomfreien Algebra?**
  Subalgebra von $P(\mathbb{Q})$ erzeugt von Intervallen $[a, b)$ mit $a \leq b$. Offenbar ist $\emptyset$ das 0-Element. Angenommen A wäre ein Atom. Dann enthält A ein nicht einpünktiges Intervall. In dieses Passt eine Menge der Form $[a, b)$ rein.
- **Welche eigenschaft erfüllen unendliche freie boolesche Algebren?**
  Sie sind atomfrei. Also folgt aus frei auch atomfrei.
- **Wie beweist man obige Aussage?**
  Für eine von C freie unendliche erzeugte Algebra A ist C unendlich. Wähle einen Term mit $0 < t(c_1, ..., c_n)$ für $c_1, ..., c_n$ und $d \in C \setminus \{c_1, ..., c_n\}$. Dann sind die Gleichungen $t \sqcap y = 0$ und $t \sqcap y = t$ nicht allgemeingültig, weil $t = 0$ es nicht ist. Somit gilt $0 < t(c_1, ..., c_n) \sqcap d < t(c_1, ..., c_n)$. Somit ist kein Term ein Atom.
- **Wie kann man die Aussage obigen Satzes auf abzählbare Algebren konkretisieren?**
  Genau dann atomfrei wenn frei.
- **Was ist die Idee des Beweises für diesen Satz?**
  Es reicht also nur die Richtung atomfrei nach frei zeigen. Man wählt sich dazu eine Abzählung a_n der Algebra und konstruiert eine Folge c_n, sodass a_n in der von $c_1, ..., c_n$ erzeugten Subalgebra liegt und aus $A \models G(c_1, ..., c_n)$ folgt, dass G bereits allgemeingültig ist. Wenn man das geschafft hat, so ist $\{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein freies Erzeugendensystem von A.
- **Wie erfolgt die Konstruktion im obigen Satz?**
  Für c_1 ist beliebig, falls $a_1 \in \{0, 1\}$ und sonst a_1. Zweite Bedingung ist trivial, da $x \geq 0$ und $x \leq 1$ allgemeingültig sind. Für die Konstruktion des c_n wähle für jedes Atom der von C erzeugten Subalgebra von A Elemente d_i, die kleiner als die jeweiligen Atome sind. Falls $a_n \sqcap t_i(c_1, ..., c_{n-1}) < t_i(c_1, ..., c_{n-1})$ wähle eben $d_i = a_n \sqcap t_i(c_1, ..., c_{n-1})$ und sonst ein beliebiges passendes d_i. Man setze $c_n = d_1 \sqcup ... \sqcup d_m$.
- **Was kann man nun bezüglich der Isomorphie unendlicher boolescher Algebren aussagen?**
  Je zwei unendliche abzählbare atomfreie boolesche Algebren sind isomorph.

- **Wie kann man obigen Satz einsehen?**
  Seien A und A' solche Algebren. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den Erzeugendensystemen C und C', weil beide abzählbar sind. Diese kann man zu einem Isomorphismus fortsetzen.

Index