Inhaltsverzeichnis

1 Was ist das hier?

Dieses Dokument ist eine Zusammenfassung von Fragen und kurzen Antworten zur Topologie basierend auf Prüfungsfragen. Die Antworten verwenden zahlreiche Zusatzliteratur und sind vor allem nicht auf formale Exaktheit, sondern auf Verständnis und "Vortragbarkeit" ausgerichtet.

2 Fragensammlung

2.1 Metrische Räume

- **Was ist eine Metrik?**

  Metrik ist eine Funktion über dem Kreuzprodukt einer Menge, die die Eigenschaften Trennung, Symmetrie und Dreiecksungleichung besitzt.

- **Was ist eine Ultrametrik?**

  Eine Metrik mit verschärfter Dreiecksungleichung. Es gilt

  $$d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$$

- **Kennen Sie Beispiele von ultrametrischen Räumen?**

  Die $\mathbb{Q}$ mit der p-adischen Metrik

  $$d(x,y) = 2^{-V_p(x-y)}$$

  wobei $V_p(x)$ den Exponenten von p in der Primfaktorzerlegung von x ist.

- **Was ist ein R-beschränkter metrischer Raum?**

  Ein metrischer Raum, für den gilt

  $$d(x,y) \leq R$$

- **Welche Metriken auf Produkten metrischer Räume kennen Sie?**

  Summenmetrik, Euklidische Metrik, Manhattan-Metrik.

- **Für welche Metrik sind beliebige Produkte R-beschränkter metrischer Räume wieder metrisch?**

  Für die Supremumsmetrik

  $$d(x,y) = \sup\{d_i(x_i,y_i) \mid i \in I\}$$

- **Wie muss man die euklidische Metrik verallgemeinern, damit diese für abzählbare Produkte R-beschränkter metrischer Räume eine Metrik ist?**

  $$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} d_i(x_i,y_i)^2}$$

- **Was ist eine Norm?**

  Eine Norm ist eine Funktion von einer Menge in $\mathbb{R}$, sodass die Werte immer positiv sind, nur für $x = 0$ ist auch die Norm 0 und es gilt

  $$|\lambda x| = |\lambda||x|$$

  und

  $$|x+y| \leq |x| + |y|$$

- **Wie kann man durch eine Norm eine Metrik induzieren?**

  $$d(x,y) = |x-y|$$

- **Welche Normen kennen Sie?**

  Supremumsnorm, Norm im Hilbertschen Folgenraum, Integralnorm.

- **Was ist der Hilbertsche Folgenraum?**

  Das ist die Teilmenge aller reellen Folgen, sodass die Summe aller Folgengliederquadrate kleiner ∞ ist.

- **Wann heisst eine Menge beschränkt?**

  Wenn das Supremum der Abstände aller Punkte der Menge kleiner als ∞ ist.

- **Wie definiert Man den Abstand eines Punktes x von einer Menge?**

  Das ist das Infimum der Abstände aller Punkte der Menge von x.

- **Wie kann man die offenen Mengen in $\mathbb{R}$ charakterisieren?**

  Eine offene Menge in $\mathbb{R}$ ist eine abzählbare Vereinigung offener Intervalle.

- **Wie kann man beweisen, dass eine offene Menge A in $\mathbb{R}$ ist eine abzählbare Vereinigung offener Intervalle ist?**

  Man führt eine Äquivalenzelation auf $\mathbb{R}$ die genau die Punkte als äquivalent bezeichnet, für die ein offenes Interval zwischen denen noch in A liegt. Die Vereinigung der Äquivalenzklassen ist eine offene Menge. In jeder Klasse liegt eine rationale Zahl. Also ist die Abbildung von $\mathbb{Q}$ in die Menge der Äquivalenzklassen (und sonst auf ein festes a_0) surjektiv.

- **Was ist ein vollständiger metrischer Raum?**

  Ein metrischer Raum in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

- **Welche Beispiele von vollständigen metrischen Räumen kennen Sie?**

  $\mathbb{R}$, jeder diskrte metrische Raum, Hilbertsche Folgenraum.

- **Ist die Vollständigkeit erblich?**

  Nein. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist kein vollständiger metrischer Raum.

- **Wann überträgt sich die Vollständigkeit auf Unterräume?**

  Eine Teilmenge bildet einen vollständigen Unterraum von X genau dann wenn die Teilmenge abgeschlossen in X ist.

- **Wann heisst eine Menge nirgends dicht?**

  Wenn der offene Kern des Abschlusses leer ist.

- **Welche Beispiele nirgendsdichter Mengen in $\mathbb{R}^n$ kennen Sie?**

  Jede endliche Menge, $\mathbb{Z}^n$, Geraden in $\mathbb{R}^2$ usw. sind nirgends dicht.

- **Wann heisst ein Raum von 1.-Kategorie, wann von 2.-Kategorie?**

  Ein Raum ist von erster Kategorie, wenn er eine abzählbare Vereinigung von nirgendsdichten Mengen ist und sonst von zweiter.

- **Was besagt der Satz von Baire?**

  Jeder vollständige metrische Raum ist von zweiter Kategorie.

- **Können Sie den Satz von Baire beweisen?**

- **Was ist eine Vervollständigung eines metrischen Raumes?**

  Eine isometrische Einbettung in einen vollständigen metrischen Raum.

- **Ist die Vervollständigung metrischer Räume eindeutig?**

  Bis aus isometrie.

- **Besitzt jeder metrische Raum eine Vervollständigung?**

  Ja. Man bildet einfach den Abschluss unter Cauchyfolgen.

2.2 Topologische Räume

- **Was ist eine Topologie auf X?**

  Eine Teilmenge der Potenzmenge von X, die unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist.

- **Welche Beispiele von Topologien kennen Sie?**

  Indiskrete, Diskrete, Metrikinduzierte, Ordnungs-, kofinite, Unterabschnittstopologie.

- **Wann heissen zwei Metriken topologisch Äquivalent?**

  Wenn sie die gleiche Topologie induzieren.

- **Was ist eine Basis einer Topologie?**

  Eine Basis einer Topologie ist ein System von Mengen, sodass jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus der Basis ist.

- **Wie kann man eine Basis noch charakterisieren?**

  Für jede offene Menge A und jeden Punkt $x \in A$ gibt es eine Basismenge B mit $x \in B \subseteq A$.

- **Wie kann man eine Basis bezüglich der Schnitte der Basismengen charakterisieren?**

  Die Vereinigung aller Mengen aus B muss den ganzen Raum ergeben, und für jeden Punkt im Schnitt zweier Mengen aus B muss auch eine Menge in B sein, die den Punkt enthält und im Schnitt liegt.

- **Was ist eine Subbasis?**

  Macht man alle endlichen Schnitte von Mengen eines Mengensystems (=Subbasis), so erhält man eine Basis einer Topologie.

- **Wie kann man beweisen, dass Abschluss eines Mengensystems bzg. der Schnitte eine Basis einer Topologie bildet?**

  Der Raum ist der leere Schnitt und der Schnitt zweier Mengen selbst ist in der Basismenge.

- **Wenn den Abschluss einer Basis bzg. der Schnitte bildet, fügt man i.A. etwas neues hinzu?**

  Der Raum $\{0, 1, 2, 3\}$ mit $B = \{\{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2\}\}$ ist eine Basis einer Topologie. Allerdings enthält der Abschluss bzg. der Schnitte auch die Menge $\{1, 2\}$.

- **Was ist eine Umgebung von x?**

  Eine Menge in der eine x-umfassende offene Menge enthalten ist.

- **Wie kann man eine offene Menge durch Umgebungen charakterisieren?**

  Eine offene Menge ist für jeden ihren Punkt eine Umgebung.

- **Was ist eine Umgebungsbasis von x?**

  Eine Umgebungsbasis enthält für jede Umgebung von x eine Basismenge, die in der Umgebung enthalten ist.

- **Was ist das erste Abzählbarkeitsaxiom?**

  Für jeden Punkt gibt es eine abzählbare Umgebungsbasis.

- **Was ist das zweite Abzählbarkeitsaxiom?**

  Der Raum besitzt eine abzählbare Topologiebasis.

- **Wieso erfüllt jeder metrisierbare Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom?**

  Die offenen Kugeln mit Radien $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ sind Umgebungsbasen für jeden Punkt.

- **Was ist separabel?**

  Der Raum besitzt eine abzählbar dichte Teilmenge.

- **Welche Beispiel von separablen Räumen kennen Sie?**

  Jeder abzählbare Raum, $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{Q}^n$ abzählbar dicht und der Hilbertsche Folgenraum mit den schliesslich 0-Folgen mit rationalen Koeffizienten.

- **Kennen sie Räume, die das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllen?**

  Z.B. $\mathbb{R}$ mit der kofiniten Toplogie, Jedes überabzählbare Produkt aus nichttrivialen Räumen.

- **Was kann man aus der Tatsache folgern, dass die kofinite Topologie auf $\mathbb{R}$ das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt?**

  Der zugehörige Raum ist nicht metrisierbar.

- **Sind die Abzählbarkeitsaxiome erblich?**

  Ja. Das folgt aus den Eigenschaften der Spurtopolgie.

- **Kennen Sie Räume, die zwar das erste aber nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen?**

  Jeder topologische Raum, der einen überabzählbaren diskreten Teilraum besitzt. Z.B. der Raum aller beschränkten stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm. Die Funktionen f_x, die an jeder Stelle z von $\mathbb{Z}$ den Wert der z-ten Dezimale haben bilden einen Diskreten Teilraum.

- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem ersten und dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom?**

  Aus dem zweiten folgt das erste, denn die Menge aller Basismengen, die den Punkt x enthalten eine abzählbare Umgebungsbasis bilden.

- **Ist jeder Raum mit der kofiniten Topologie separabel?**

  Ja. Denn der Raum besitzt eine abzählbar unendliche Teilmenge. Diese ist dann dicht.

- **Kennen Sie einen nicht separablen Raum?**

  $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie.

- **Erfüllt $\mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie das erste Abzählbarkeitsaxiom?**

  Ja. Die einpünktigen Mengen sind abzählbare Umgebungsbasen.

- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom und der Sparabilität?**

  Jeder Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist separabel, denn die Menge von je einem Punkt aus je einer Basismenge ist dicht.

- **Wenn man einen separablen metrischen Raum hat, welche Axiome erfüllt er?**

  Beide, denn die Kugeln um die Punkte der dichten Menge eine abzählbare Topologiebasis bilden.

- **Genügt ein separabler Raum mit abzählbaren Umgebungsbasen i.A. dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom?**

  Nein. Denn die Sorgenfrey-Gerade erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, ist separabel aber erfüllt nicht das zweite.

- **Ist die Separabilität erblich?**

  Nein.

- **Ist die topologie der Sorgenfrey-Geraden metrisierbar?**

  Nein.

2.3 Stetige Abbildungen

- **Wann ist eine Abbildung stetig?**

  Wenn das Urbild jeder offenen Menge im Bild wieder offen ist. Analog für abgeschlossene Mengen.

- **Sind im Allgemeinen die Bilder offener Mengen wieder offen?**

  Nein. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ hat als Bild von X das Interval $(0, 1]$ und ist somit weder offen noch abgeschlossen.

- **Was ist ein Homöomorphismus?**

  Eine bijektive Abbildung, sodass beide f und f^{-1} stetig sind.

- **Was ist eine topologische Invariante?**

  Eine Eigenschaft oder ein Objekt, das sich unter Homöomorphismen erhält.

- **Welche topologischen Invarianten kennen Sie?**

  Kardinalität, Dimension, Separabilität, Abzählbarkeitsaxiome, Metrisierbarkeit.

2.4 Konstruktion topologischer Räume

- **Was ist eine Initialtopologie (einer Abbildung)?**

  Initialtopolgie (einer Abbildung in einen topologischen Raum) ist die Menge der Urbilder offener Mengen des Bildraumes. Es ist die gröbste Topologie, sodass die Abbildung stetig ist.

- **Was ist die Spurtopologie?**

  Spurtopologie oder auch Unterraumtopologie ist die Initialtopologie bezüglich der Identitätsabbildung einer Teilmenge eines topologischen Raumes in den Raum selbst.

- **Wie sehen die offenen Mengen der Spurtopologie von $A \subseteq X$ aus?**

  Das sind gerade die Schnittmengen der offenen Mengen in X mit A.

- **Wie sehen die Basismengen bzw. die Umgebungsbasen der Spurtopologie aus?**

  Das sind gerade die Schnittmengen der Basis- bzw. Umgebungsbasismengen in X mit A.

- **Wann sind die offenen bzw. abgeschlossenen Mengen eines Unterraums $A \subseteq X$ in X wieder offen bzw. abgeschlossen?**

  Genau dann, wenn die Teilmenge A offen bzw. abgeschlossen in X ist.

- **Ist die Bildung von Unterräumen Transitiv?**

  Ja. Der Unterraum A eines Unterraumes B von X trägt genau die selbe Topologie, wie sie bei der Bildung der Spurtopologie von A in X entstünde.

- **Wann heisst eine Eigenschaft erblich?**

  Wenn sie sich auf beliebige Unterräume überträgt.

- **Welche erblichen Eigenschaften kennen Sie?**

  Metrisierbarkeit, Hausdorff-Eigenschaft.

- **Was ist eine Einbettung?**

  Eine Einbettung ist eine Abbildung, sodass der Urbildraum und das Bild mit der Spurtopologie des Bildraumes homöomorph sind.

- **Beispiele für Einbettungen?**

  Z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 0)$. Beachte: $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (sinx, cosx)$ ist *keine* Einbettung.

- **Was ist die Zariski-Topologie?**

  Eine Topologie mit der Menge aller Varietäten von multivariaten Polynomen über einer endlichen Variablenmenge als Basis von abgeschlossenen Mengen.

- **Wie sehen die offenen Mengen in der Zariski-Topologie?**

  Das sind die Komplemente der Varietäten von Polynomensystemen. Nach dem Hilbertschen Basissatz kann man sogar die Polynomensysteme endlich wählen.

- **Welche Eigenschaften besitzt die Zariski Topologie?**

  Sie ist nicht hausdorffsch, nicht metrisierbar und erfüllt für einen überabzählbaren Körper nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom.

- **Was ist die Initialtopologie meherer Abbildungen?**

  Die Subbasis dieser Topologie ist eine Vereinigung aller urbilder offener Mengen der (topologischen) Zielräume. Somit ist diese Topologie die gröbste, sodass alle Abbildungen stetig sind.

- **Was ist eine Basis der Initialtopologie mehrerer Abbildungen?**

  Das sind z.B. endliche Schnitte von Mengen der Subbasis.

- **Was ist ein topologisches Produkt?**

  Die Menge von komponententreuen Abbildungen (oder auch Familien der Elemente der Komponenten) aus der Indexmenge in die Vereinigungsmenge der Komponenten mit der durch die Projektionen induzierten Initialtopologie.

- **Wie sieht eine Basis eines topologischen Produktes aus Elementarmengen?**

  Z.B. die Menge aller solcher Punkte, sodass für jeden endlichen Indexabschnitt die Komponenten bzg. dieses Abschnittes innerhalb einer Familie offener Mengen des Abschnittes liegen.

- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen der topologischen Produkttopologie und der metrischen Produkttopologie abzählbar vieler 1-beschränkter metrischer Räume?**

  Sie stimmen überein. In bzw. um jede offene Basismenge des topologischen Produktes eine offene metrische Kugel gelegt werden.

- **Wie sieht die Metrik für ein abzählbares metrisches 1-beschränktes Produkt aus, sodass die die erzeugte Topologie mit dem topologischen Produkt übereinstimmt?**

  $D_1(a,b) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$

- **Was ist die universelle Eigenschaft der Produkttopologie**

  Für eine Abbildung von einem topologischen Raum in das Produkt gilt, dass sie genau dann stetig ist, wenn die Projektionen angewandt auf die Abbildung alle stetig sind.

- **Welche Eigenschaften erhalten sich bei abzählbaren Produkten?**

  Metrisierbarkeit, erstes und zweites Abzählbarkeitsaxiom, Separabilität.

- **Wie kann man sich das topologische Produkt $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der diskreten Topologie auf $\{0,1\}$ vorstellen?**

  Als einen binären Baum.

- **Wie sehen typische Basismengen der Topologie in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aus?**

  Alle solche Mengen die in ihrem endlichen Anfangsabschnitt übereinstimmen.

- **Es gibt ja einen topologischen Raum, der ganz genauso ist wie $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, und nur ein anderes Gewand trägt, was ist das?**

  Das Cantorsche Diskontinuum mit der Unterraumtopologie der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$.

- **Definition vom Cantorschen Diskontinuum?**

  Schnitt einer induktiv definierten Familie von Teilmengen von $[0,1]$ wobei aus jedem Teilinterval einer solchen Teilmenge das mittlere offene Drittel entfernt wird.

- **Was für Eigenschaften hat das Cantorsche Diskontinuum?**

  Überabzählbar, abgeschlossen, kompakt, nulldimensional, total-unzusammenhängend.

- **Warum ist das Cantorsche Diskontinuum abgeschlossen?**

  Ja. Als Durchschnitt unendlich vieler Abgeschlossener Mengen, da jede Menge in der Kette eine Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist.

- **Warum ist das Cantorsche Diskontinuum kompakt?**

  Weil es eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}$ ist.

- **Wieso ist das Cantorsche Diskontinuum homöomorph zum binären Baum?**

  Die Abbildung $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C,\ f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i}$ ist ein Homöomorphismus. Die basisoffenen Mengen sind wieder offen in C und umgekehrt.

- **Ist das Cantorsche Diskontinuum hausdorffsch?**

  Ja, da kompakt.

- **Ist das Produkt von Hausdorffräumen ein Hausdorff-Raum?**

  Ja. Denn zu zwei verschiedenen Elementen a und b kann man mindestens ein $i \in I$ wählen, wo sie sich unterscheiden. Dann gibt es im Komponentenraum X_i zwei trennende Umgebungen A_i und B_i, deren Urbilder offen sind und a und b trennen.

- **Wenn das Produkt von topologischen Räumen hausdorffsch, sind die einzelnen Räume das auch?**

  Ja. Für ein festes Element x ist das Produkt der Räume x_i für $i \neq j$ und X_i ein zu X_i homöomorpher Unterraum des Produktes.

- **Wie sehen die typischen offenen Mengen im Cantorschen Diskontinuum?**

  Das sind ternäre Entwicklungen, die den einen festen Anfangsabschnitt gemeinsam haben.

2.5 Konstruktion topologischer Räume II

- **Was ist eine Finaltopologie (einer Abbildung)?**

  Für eine Abbildung von einem topologischen Raum in eine Menge X ist die Finaltopologie die Menge aller solcher Teilmengen von X, sodass das Urbild offen ist. Die Finaltopologie ist die feinste Topologie, die die Abbildung stetig macht.

- **Welche Anwendungen von Finaltopologien einer Abbildung kennen Sie?**

  Quotientenräume.

- **Was ist ein Quotientenraum?**

  Eine Menge von Restklassen bezüglich einer Äquivalenzrelation mit der Finaltopologie induziert durch die kanonische Projektion.

- **Kennen Sie Beispiele von Quatientenräumen?**

  $\mathbb{R}$ mit

  $$x \sim y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$$

  Dann ist $\mathbb{R}/\sim$ homöomorph zum Einheitskereis.

- **Was ist eine Identifizierungstopologie?**

- **Was ist eine Finaltopologie mehrerer Abbildungen?**

  Die feinste Topologie, für die alle Abbildungen stetig sind. Die Topologie ist der Schnitt aller Finaltopologien induziert durch die einzelnen Abbildungen.

- **Welche universelle Eigenschaft besitzen die Finaltopologien?**

  Für eine Abbildung aus dem Raum in einen anderen topologischen Raum gilt, dass sie stetig ist genau dann, wenn die Abbildung angweandt auf alle f_i stetig ist.

- **Was ist eine topologische Summe?**

  Eine disjunktifizierte Nebeneinanderstellung einer Menge von topologischen Räumen mit der durch die Identitäten erzeugten Finaltopologie.

- **Welche Anwendungen haben topologische Summen?**

  Zusammenkleben von topologischen Räumen.

2.6 Kompaktheit

- **Was heißt kompakt?**

  Quasikompakt (Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung), und Hausdorffsch (je zwei verschiedene Punkte lassen sich durch disjunkte offene Mengen trennen).

- **Was kann man über Folgen in quasikomapkten Räumen aussagen?**

  Jede Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

- **Erhält sich Kompaktheit bei stetigen Abbildungen?**

  Nein. Quasikompaktheit erhält sich aber die Hausdorff-Eigenschaft erhält sich nicht.

- **Wann ist eine stetige abbildung von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorff-Raum Einbettung bzw. Homöomorphismus?**

  Abbildung ist abgeschlossen. Ist die Abbildung injektiv bzw. bijektiv so ist die eine Einbettung bzw. Homöomorphismus.

- **Was besagt der Kompaktheitssatz des Aussagenkalküls?**

  In einer unendlichen Menge von boolschen Variablen und einer unendlichen Termmenge gilt, falls jede endliche Teilmenge eine erfüllende Belegung besitzt, so besitzt auch die ganze Teilmenge eine.

- **Wie beweist man den Kompaktheitssatz des Aussagenkalküls?**

  Der Produktraum ist kompakt. Die Menge der erfüllenden Belegungen ist offen in der Produkttopologie...

- **Was besagt der Kompaktheitssatz von Relationenräumen?**

- **Für stetige Abbildungen von einem Kompakten Raum nach $\mathbb{R}$ gilt ja, dass das Maximum und Minimum angenommen wird. Warum?**

  $\mathbb{R}$ Hausdorffsch. Also ist der Bildraum einer Stetigen funktion aus einem kompakten Raum kompakt und daher beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Also ist der minimale Randpunkt ein Minimum und der maximale ein Maximum.

- **Wann ist ein Unterraum eines kompakten Raumes kompakt?**

  Genau dann wenn sie abgeschlossen sind, denn das Komplement einer kompakten Menge ist offen.

- **Überträgt sich die offene Überdeckungseigenschaft auch auf Subbasen?**

  Ja. Es reicht für die Quasikompaktheit die Überdeckungseigenschaft für die Subbasis zu zeigen. Dies ist äquivalent. Der Beweis verwendet Ultrafilter!

- **Wann ist ein Unterraum eines quasikompakten Raumes quasikompakt?**

  Wenn er abgeschlossen ist, denn nimmt man eine offene Überdeckung U vom Raum sodass die Schnitte mit A eine offene Überdeckung von A ergeben, so ist $U \cup \sim A$ eine Überdeckung vom Gesamtraum und besitzt somit eine endliche Teilüberdeckung. Die Schnitte der endlichen Überdeckung mit A ohne da $\sim A$ ist gerade eine endliche Teilüberdeckung von A. Die umkehrung gilt nicht.

- **Kennen Sie einen Teilraum eines quasikompakten Raumes, das quasikompakt ist aber nicht abgeschlossen?**

  Jeder echte Teilraum eines endlichen Raumes mit indiskreter Topologie ist quasikompakt, aber nicht abgeschlossen.

- **Welche Eigenschaften bringt die Kompaktheit von Unterräumen für Hausdorfräume?**

  Man kann einen kompakten Unterraum A und einen Punkt x im Komplement durch offene Umgebungen trennen. Zu jedem Punkt in der Menge gibt es eine offene Umgebung, die den Punkt von x trennt. Die Schnitte von all diesen Mengen mit A sind eine offene Überdeckung von A. Die entsprechenden Offenen Mengen bilden eine offene Umgebung von A.

- **Was sind die kompakten Unterräume von $\mathbb{R}$?**

  Abgeschlossene und beschränkte Intervalle.

- **Erhält sich Kompaktheit bei topologischen Produkten?**

  Ja. Quasikompaktheit nach Tychonoff. Hausdorff-Eigenschaft ebenfalls.

- **Gilt auch wenn ein Produktraum kompakt ist, dass die Komponenten kompakt sind?**

  Ja. Quasikompaktheit: Die Projektion ist eine stetige surjektive Abbildung. Oder anders: Bei Quasikompaktheit induziert eine offene Überdeckung einer der Komponenten durch ihre Urbilder wegen der Stetigkeit der Projektionen eine offene Überdeckung für den Gesamtraum. Dieser besitzt, da kompakt, eine endliche Teilüberdeckung davon. Wählt man die Mengen aus, die diese Teilüberdeckung induzieren, so ist dies auch eine offene Überdeckung der Komponente. Bei der Hausdorff-Eigenschaft gilt die Äquivalenz bekannterweise.

- **Wie beweist man des Satz von Tychonoff?**

  Man betrachtet die Bilder eines Ultrafilters auf dem Produkt. All diese Filter sind auch Ultrafilter, die konvergieren. Demnach ist der Produktraum quasikompakt.

- **Wenn man $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie nimmt, und dann $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ist das kompakt?**

  Ja. Jeder endliche topologischer Raum ist kompakt, also auch $\{0,1\}$. Somit ist das Produkt ebenfalls kompakt.

- **Was bedeutet lokalkompakt?**

  Ein Raum ist lokalkompakt, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

- **Welche struktur bilden die lokalkompakten Umgebungen eines Punktes in einem lokalkompakten Raum?**

  Eine Umgebungsbasis.

- **Was besagt der Satz über die Alexandroff- oder Einpunktkompaktifizierung?**

2.7 Zusammenhang

- **Definieren sie Zusammenhang?**

  Ein zusammenhängender Raum besitzt keine nichttriviale Partition in zwei offene Mengen. Oder anders: $\emptyset$ und X sind die einzigen offen-abgeschlossenen Mengen.

- **Wann ist eine Teilmenge eines topologischen Raumes zusammenhängend?**

  Wenn sie als topologischer Unterraum zusammenhängend ist. Es gibt dann auch keine offenen Mengen im oberraum, deren Schnitte mit dem Unterraum eine Partition des Unterraumes bilden.

- **Ist $\mathbb{Q}$ mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}$ zusammenhängend?**

  Nein. Die Mengen $(-\infty, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$ bilden eine Partition von $\mathbb{Q}$.

- **Ist eine Menge zwischen einer zusammenhängenden Menge und ihrem Abschluss zusammenhängend?**

  Ja. Sei $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Dann folgt aus einer Partition von B, dass es offene Mengen im Oberraum X gibt, deren Schnitte genau die Partition bilden. Daraus folgt, dass A auch eine Teilmenge von der Vereinigung der Partition ist und ist somit nicht zusammenhängend.

- **Erhält sich Zusammenhang unter stetigen Abbildungen?**

  Ja. Denn eine offene Partition des Bildraumes induziert eine offene Partition des Urbildraumes.

- **Was sind die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$?**

  Einpünktige Mengen, offene, halboffene und abgeschlossene Intervalle, ganz $\mathbb{R}$.

- **Wie lautet der Zwischenwertsatz?**

  Eine reelwertige stetige Abbildung von einem zusammenhängenden Raum in $\mathbb{R}$ nimmt zwischen zwei Werten im Bild alle Werte ein.

- **Wieso gilt der Zwischenwertsatz?**

  Das bild des zusammenhängenden Raumes ist zusammenhängend in $\mathbb{R}$, also $\mathbb{R}$, ein Interval oder einpünktig. Gäbe es einen Punkt zwischen zwei verschiedenen Werten im Bildraum, der von der Funktion nicht angenommen wird, so kann man eine offene Partition des Bildes angeben. Diese induziert eine offene Partition im Urbildraum. Widerspruch.

- **Welche Hilfssätze zum Nachweis des Zusammenhangs kennen Sie?**

  Eine Vereinigung von zusammenhängenden Teilräumen mit nichtleerem Schnitt ist zusammenhängend. Eine Vereinigung von zusammenhängenden Teilräumen, die keinen leeren Schnitt mit einer gemeinsamen Menge haben ist zusammenhängend.

- **Ist der Schnitt zweier zusammenhängender Mengen i.A. zusammenhängend?**

  Nein.

- **Was ist eine Zusammenhangskomponente?**

  Eine (inklusions-)maximale Zusammenhängende Teilmenge eines Raumes. Eine Zusammenhangskomponente von $x \in X$ ist die Vereinigung aller zusammenhängender Mengen, die x enthalten.

- **Sind die Zusammenhangskomponenten abgeschlossen?**

  Ja. Da die Zusammenhangskomponente die maximale zusammenhängende Menge ist sie gleich ihrem Abschluss, also auch abgeschlossen.

- **Sind die Zusammenhangskomponenten auch offen?**

  Nein, i.A. nicht. Nur wenn es insgesamt nur endlich viele gibt. Der Kompement einer Zusammenhangskomponente ist eine Vereinigung von abgeschlossenen Mengen (restliche Zusammenhangskomponenten). Ist diese Vereinigung nicht endlich, muss sie nicht abgeschlossen sein.

- **Welche Eigenschaften von Zusammenhangskomponenten kennen Sie?**

  Eine Zusammenhangskomponente von x ist eine (i.A. echte) Teilmenge des Schnittes aller x enthaltenden offen-abgeschlossenen Mengen.

- **Was bedeutet Total-Unzusammenhängend?**

  Jede Zusammenhangskomponente ist einpünktig.

- **Was bedeutet Nulldimensional?**

  Ein Hausdorff-Raum mit einer Basis aus offen-abgeschlossenen Mengen.

- **Welche Beziehung besteht zwischen Total-Unzusammenhängend und Nulldimensional?**

  Jeder Nulldimensionale Raum ist total-unzusammenhängend.

- **Ist das Cantorsche-Diskontinuum total unzusammenhängend?**

  Ja. Denn der ist zum binären Baum homöomorph und die Basismengen sind abgeschlossen. Das gilt, weil das Komplement einer basismenge eine Vereinigung aller solcher offener Basismengen ist, die im Anfangsabschnitt mit der gegebenen Basismenge nicht übereinstimmen.

- **Was ist ein wegzusammenhängender Raum?**

  In dem zwischen je zwei Punkten ein Weg existiert.

- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen Zusammenhang und Wegzusammenhang?**

  Aus Wegzusammenhang folgt zusammenhang. Denn eine Partition eines wegzusammenhängenden aber nicht zusammenhängenden Raumes induziert eine Partition des Intervalls $[0, 1]$ in offene Mengen.

- **Kennen Sie zusammenhängende aber nicht wegzusammenhängende Mengen?**

  Die Sinuskurve des Topologen. Die ist zusammenhängend, gleich dem Abschluss der zusammenhängenden Sinuskurve. Es gibt keinen Weg vom Abschluss auf die Kurve.

- **Was bedeutet lokal wegzusammenhängend?**

  Wenn die Topologie eine Basis aus wegzusammenhängenden Mengen besitzt.

- **Was kann man in einem lokal-wegzusammenhängenden Raum über das Verhältnis zwischen Wegzusammenhang und Zusammenhang sagen?**

  Die Eigenschaften sind äquivalent. Denn die Menge von wegen aus einem Punkt aus eine triviale offene Partition des Raumes bildet. Speziell kann man diese Eigenschaft auf $\mathbb{R}^n$ anwenden.

2.8 Konvergenz, Filter

- **Wann erfüllt ein topologischer Raum die Folgenkriterien?**

  Wenn er das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Denn wie in metrischen Räumen kann man die Kugeln durch Umgebungsbasen ersetztn.

- **Kennen Sie einen Raum in dem die Folgenkriterien nicht gelten?**

  Der Raum der Stetigen Funktionen von $[0, 1] \to [-1, 1]$ versehen mit der Produkttopologie.

- **Was ist ein Filter?**

  Ein Mengensystem ohne der leeren Menge, das bezüglich Schnitte und Obermengenbildung abgeschlossen ist.

- **Was ist eine Filterbasis?**

  Ein Mengensystem ohne der leeren Menge, in dem für je zwei Mengen eine dritte existiert, die in ihrem Schnitt liegt.

- **Welche Filter kennen Sie?**

  Umgebungsfilter, Folgenfilter, Frechetfilter (mit $\{a, \infty \mid a \in \mathbb{R}\}$ als Filterbasis.

- **Was ist ein fixierter Filter?**

  Ein Filter dessen Schnitt nicht leer ist.

- **Was ist ein Ultrafilter?**

  Ein inklusionsgrösster Filter. Jeder Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden nach dem Zornschen Lemma.

- **Wie kann man einen Ultrafilter charakterisieren?**

  Entweder ist eine Menge im Filter oder das Komplement ist im Filter.

- **Wann konvergiert ein Filter gegen x?**

  Wenn die Umgebungsmenge eines Punktes x Teilmenge des Filters ist.

- **Was ist ein Berührungspunkt eines Filters?**

  Ein Punkt x ist ein Berührungspunkt des Filters, wenn jede Menge im Filter und jede Umgebung des Punktes einen nichtleeren Schnitt haben.

- **Wie kann man den Abschluss und Stetigkeit mit Filtern Charakterisieren?**

  Genauso wie mit den Folgen. Filter sind also der allgemeinere Ersatz für Folgen.

- **Was lässt sich über die Filtereigenschaften von Initialtopologien sagen?**

  Für einen Filter ist äquivalent, dass der Filter gegen einen Punkt konvergiert genau dann, wenn alle Funktionen gegen $f_i(x)$ konvergieren. Analoges gilt für Produkte.

2.9 Metrisierbarkeit

- **Was ist ein T_0 Raum?**

  Von zwei verschiedene Punkte besitzt einer davon eine Umgebung, die den anderen Punkt nicht enthält.

- **Was ist ein T_1 Raum?**

  Je zwei Punkte besitzen trennende, aber nicht unbedingt disjunkte Umgebungen.

- **Was ist ein T_2 Raum?**

  Je zwei Punkte besitzen disjunkte trennende Umgebungen.

- **Was ist ein T_3 Raum?**

  Je ein Punkt und eine abgeschlossene Menge besitzen trennende disjunkte Umgebungen.

- **Was ist ein T_4 Raum?**

  Je zwei disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen disjunkte trennende Umgebungen.

- **Was ist ein vollständig regulärer Raum?**

  Je ein Punkt und eine abgeschlossene Menge lassen sich durch eine stetige reellwertige Funktion trennen.

- **Was ist ein normaler Raum?**

  Ein normaler Raum besitzt die Eigenschaften T_1 und T_4.

- **Was kann man über die Mengen und eine trennende Funktion davon sagen?**

  Die Mengen besitzen disjunkte trennende Umgebungen. Denn die Mengen $f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ und $f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$ trennen die Mengen.

- **Wie ist der erste Urisonsche Metrisationssatz?**

  a) X ist metrisierbar und separabel

  b) X ist regulär und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom

  c) X ist einbettbar in den $[0,1]^{\mathbb{N}}$

- **Was ist regulär?**

  Der Raum erfüllt die Trennungsaxiome T_3 und T_1.

- **Was ist denn eine abzählbare dichte Teilmenge bei $[0,1]^{\mathbb{N}}$?**

  Die Menge der schliesslich konstanten Folgen mit rationalen Koefizienten.

- **Was ist denn eine abzählbare Basis bei $[0,1]^{\mathbb{N}}$?**

  Als ein abzählbarer Teilraum eines metrisierbaren Raumes ist die Teilmenge der schliesslich konstanten Folgen mit rationalen Koefizienten A von $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ebenfalls metrisierbar. Da nimmt man als Basis einfach offene Kugeln mit Zentren in A indiziert durch die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

- **Welches zentrale Lemma benötigt man für den Beweis des ersten metrisationssatzes von Urisonn?**

  Das urisonsche Lemma.

- **Was besagt das urisonnsche Lemma?**

  In jedem topologischen Raum, in dem je zwei abgeschlossene disjunkte Teilmengen durch disjunkte offene Mengen trennbar sind (T_4) kann man für je zwei solche abgeschlossene disjunkte Mengen eine trennende reellwertige Funktion angeben.

- **Können Sie das urisonsche Lemma beweisen?**

  Die Idee ist immer feinere Treppenfunktionen mit je halbierter Schrittweite (Höhendifferenz) induktiv durch einen Grenzwertübergang zu einer stetigen Funktion zu machen. Dies geht, weil für jede abgeschlossene Menge A und eine offene Obermenge B davon eine offene Menge X existiert mit $A \subset X \subset \overline{X} \subset B$.

- **Bei kompakten Räumen kann man ja auch einen einfacheren Metrisationssatz anführen, wie geht der?**

  Das ist der zweite Metrisationssatz von Urison. Für einen kompakten topologischen Raum ist die Metrisierbarkeit und das zweite Abzählbarkeitsaxiom äquivalent.

- **Wenn man die beiden Sätze vergleicht, dann erhält man ja, dass jeder kompakte Raum regulär ist. Ist jeder kompakte Raum auch normal?**

  Ja.