Eliminationsalgorithmen

Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist das Hier?

Dieses Dokument ist eine Zusammenfassung von Fragen und kurzen Antworten zu Eliminationsalgorithmen und Anwendungen basierend auf der Vorlesungsmitschrift. Die Antworten verwenden das Skript, die Vorlesungsmitschrift und einige Papers und sind vor allem nicht auf formale Exaktheit, sondern auf Verständnis und "Vortragbarkeit" ausgerichtet.

2 Fragensammlung

Hier sind die Fragen mit kurzen Antworten.

2.1 Grundlagen

- **Was ist eine Basisformel?**

  Eine Basisformel ist eine atomare Formel oder eine negierte Atomare Formel.

- **Was ist Negations-Normalform?**

  Eine quantorenfreie Formel ist in NNF, falls sie aus $\vee$ und $\wedge$ Verknüpfungen von Basisformeln besteht.

- **Wie kann man aus einer quantorenfreien Formel eine äquivalente quantorenfreie Formel in NNF konstruieren?**

  Man bewegt mit De-Morgan alle negationen zu den atomaren formeln und löst mehrfache Negationen vor atomaren Formeln auf.

- **Was ist Disjunktive Normalform?**

  Eine quantorenfreie Formel ist in DNF, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Basisformeln ist.

- **Was ist Konjunktive Normalform?**

  Eine quantorenfreie Formel ist in KNF, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Basisformeln ist.

- **Wie kann man aus einer quantorenfreien Formel eine äquivalente quantorenfreie Formel in DNF bzw. in KNF konstruieren?**

  Überführung in NNF und anschliessende Auflösung von verschachtelten Konjunktionen und Disjunktionen distributiv auf.

- **Was ist die Pränexe Normalform?**

  Eine Formel ist in PNF, wenn sie aus einem Block (wechselnder) Quantoren und einer quantorenfreien Matrix besteht von der Form

  $$Q_0 x_0 Q_1 x_0 ... Q_n x_n \varphi$$

  mit φ quantorenfrei.

- **Wie kann man aus einer Formel eine Formel in PNF konstruieren?**

  Für eine atomare Formel ist nichts zu tun. Für eine Negierte Formel in PNF gilt

  $$PNF(\neg Q_0 x_0 Q_1 x_1 ... Q_n x_n \varphi) = Q_0' x_0 Q_1' x_1 ... Q_n' x_n \neg\varphi$$

  Für eine Konjunktion von Formeln in PNF gilt

  $$PNF(Q_0 x_0 Q_1 x_1 ... Q_n x_n \varphi \wedge Q_{n+1} x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} ... Q_m x_m \psi) =$$
  $$Q_0 x_0 Q_1 x_1 ... Q_m x_m (\varphi \wedge \psi)$$

  wobei man duch gebundene Umbenennung anwendet. Analog verfährt man mit den Disjunktionen.

- **Was ist die gebundene Umbenennung?**

  Ein Verfahren, mit dem man für zwei Formeln die Disjunktheit der gebundenen Variablenmengen und die Disjunktheit von gebundenen Variablenmengen zu den gegenüberstehenden freien Variablenmengen erreichen kann.

- **Was bedeutet "eine Klasse von Strukturen erlaubt Quantorenelimination"?**

  Eine Klasse von Strukturen über einer Sparache erlaubt QE, falls für jede Formel eine in der ganzen Klasse äquivalente quantorenfreie Formel existiert. Analog kann man die Definition für eine Menge von Formeln angeben.

- **Wann ist die Menge der freien Variablen der quantorenfreien Formel φ' eine Teilmenge der freien Variablen der ursprünglichen äquivalenten Formel φ ?**

  Wenn die Variablenmenge von φ nicht leer ist, wenn die Sprache mindestens eine Konstante enthält oder wenn die Klasse nur eine Struktur enthält.

- **Kennen Sie ein Gegenbeispiel, wo die freie Variablenmenge nach QE grösser wird?**

- **Unter welchen Operationen an der Sprache, bzw. Struktur erhält sich die Existenz eines QEV?**

  Beim Hinzunehmen von Konstanten (Man ersetzt einfach die *endlich vielen* in der Formel auftretenden Konstanten durch neue Variablen). Erlaubt eine Klasse von Strukturen QE, so erlaubt auch jede Unterklasse QE (speziell ist ein QEV für die Oberklasse auch ein QEV für die Unterklassen). Auch unter Erweiterungen durch Funktionen und Relationen, die sich quantorenfrei und endlich durch ursprüngliche beschreiben lassen (man ersetzt einfach alle neuen Operationen durch alte).

- **Die Existenz der QE ist bzg. der Bildung von Unterklassen abgeschlossen. Gilt die Umkehrung auch?**

  Nein. Für die leere Sprache erlauben die beiden Mengenstrukturen $A = \{1\}$ und $B = \{1, 2\}$ QE. Die Klasse $\{A, B\}$ erlaubt aber keine QE, da die Formel
  $$\exists x(\neg(x = y))$$
  in beiden Unterklassen unterschiedliche Ergebnisse liefert. Allerdings kann man in der gegebenen Sprache nur Formlen mit einer Variablen, die entweder zu $true$ oder zu $false$ äquivalent sind darstellen.

- **Was ist eine 1-primitive Formel?**

  Eine 1-primitive Formel ist eine existentielle Aussage über einer Konjunktion von Basisformeln
  $$\exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$$

- **Was ist eine positive quantorenfreie Formel?**

  Eine quantorenfreie Formel ohne Negationen.

- **Was ist eine positive 1-primitive Formel?**

  Eine positive 1-primitive Formel ist eine existentielle Aussage über einer Konjunktion von atomaren Formeln
  $$\exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$$

- **Muss man die existenz der QE auch für den Allquantor zeigen?**

  Nein. Denn es gilt
  $$\forall x(\varphi) \Longleftrightarrow \neg\exists x(\neg\varphi)$$

- **Wie kann man die Existenz eines QEV für eine Klasse auf die existenz eines QEV für diese Klasse und die Menge der 1-primitiven Positiven Formeln zurückführen?**

  Existiert ein QEV für die Menge der 1-primitiven Formeln, so existiert ein QEV für alle Formeln. Man schreibt einen rekursiven Algorithmus, der die Elimination auf 1-primitive Formeln zurückführt. Speziell berechnet man vor dem innersten Existenziellen Quantor die DNF und bewegt den Quantor in die Disjunktion hinein.

- **Welche Zusammenhang besteht zwischen den 1-primitiven und den positiven 1-primitiven Formeln und der Existenz der QE?**

  Lässt sich jede Basisformel in eine äquivalente positive quantorenfreie Formel umwandeln, so induziert ein QEV für die positiven 1-primitiven Formeln ein QEV für alle Formeln.

- **Welche Rolle spielen die atomare Formeln ohne der gerade zu eliminierenden quantifizierten Variable?**

  Die kann man nach den Rechenregeln für boolsche Operationen aus dem quantifizieren Bereich rausziehen.

- **Was ist eine definierbare bzw. quantorenfrei definierbare Menge?**

  Eine definierbare Menge in einer Struktur ist die Erfüllungsmenge einer Formel (d.h. die Menge aller Punkte, für die die Formel gilt). Eine quantorenfrei definierbare Menge ist die Erfüllungsmenge einer quantorenfreien Formel.

- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen äquivalenten Formeln und den zugehörigen definierten Mengen?**

  Die Mengen sind gleich genau dann, wenn die Formeln äquivalent sind.

- **Wie kann man die Existenz von QE durch definierbare Mengen charakterisieren?**

  Eine Struktur erlaubt QE genau dann, wenn jede definierbare Menge auch quantorenfrei definierbar ist.

- **Was ist eine definierbare Funktion?**

  Falls der Graph der Funktion eine definierbare Menge ist.

- **Kennen Sie ein Beispiel einer definierbaren Funktion?**

  Eine vektorvertige Funktion, die eine Menge von Termen an den gegebenen Stützstellen auswertet. Der Graph ist durch die Konjunktion von Gleichungen für die Terme definiert.

- **Was ist eine einfache Projenktion?**

  Eine Funktion, die Einer Teilmenge $X \subseteq A^n$ eine Teilmenge $Y \subset A^{n-1}$ so zuordnet, dass für ein i gilt
  $$y \in Y \Longleftrightarrow \exists x_i(x_0, ..., x_i, ..., x_n) \in X$$

- **Welche Charakterisierungen der existenz einer QE mit Projektionen kennen Sie?**

  Zur Existenz der QE sind äquivalent, dass für jede quantorenfrei definierbare Menge die einfache Projektion wieder eine quantorenfrei definierbare Menge ist.

- **Welche Charakterisierungen der existenz einer QE mit definierbaren Funktionen kennen Sie?**

  Zur Existenz der QE sind äquivalent, dass für jede quantorenfrei definierbare Menge und eine definierbare Funktion das Bild wieder eine quantorenfrei definierbare Menge ist.

- **Was ist ein Entscheidungsverfahren?**

  Ein Entscheidungsverfahren ist ein Algorithmus, der bei Vorlage eines Satzes entscheidet ob der Satz (in einer Struktur, Klasse oder Auswertungsmenge) gilt oder nicht.

- **Was bedeutet elementar äquivalent?**

  Zwei Strukturen A,B heissen elementar äquivalent, falls jeder Satz, der in A gilt in B gilt und umgekehrt.

- **Was bedeutet vollständig?**

  Eine Klasse ist vollständig genau dann, wenn je zwei Strukturen elementar äquivalent sind.

- **Was kann man über Vollständigkeit einer Klasse aussagen, wenn die Klasse QE erlaubt?**

  Ist die Klasse vollständig für die Menge aller atomaren Formeln mit höchstens einer Variablen, so ist die Klasse vollständig. Enthält die Sprache mindestens eine Konstante, und ist die Klasse für die Menge aller atomaren Sätze vollständig, so ist die Klasse auch vollständig.

- **Was lässt sich über die Entscheidbarkeit einer Klasse sagen, wenn die Klasse QE erlaubt?**

  Falls die Klasse entscheidbar ist für die Menge der quantorenfreien Formeln mit höchstens einer Variable so ist die Klasse entscheidbar. Enthält die Sprache mindestens eine Konstante und die Klasse ist entscheidbar für die Menge der atomaren Sätze so ist die Klasse entscheidbar. Analoges gilt für die Entscheidbarkeit und Vollständigkeit.

- **Sind die Strukturen einer entscheidbaren Klasse immer entscheidbar?**

  Nein. Wenn die Klasse vollständig ist gilt das allerdings.

- **Kennen Sie ein Beispiel, wo eine Struktur einer entscheidbarer Klasse nicht entscheidbar ist?**

  Ja. Für die Sprache $\{0, s, R\}$ und eine nichtrekursive Teilmenge der Natürlichen Zahlen sind zwei Strukturen

  $$A = \{\mathbb{N}, 0, s, 1_M\}$$

  und

  $$B = \{\mathbb{N}, 0, s, 1_{\mathbb{N}\setminus M}\}$$

  beide unentscheidbar, aber die Klasse $\{A, B\}$ ist entscheidbar.

- **Was dedeutet eine elementare Substruktur?**

  Eine elementare Substruktur A von B ist mit B elementar äquivalent über der Trägermenge von A.

- **Was bedeutet Substruktur-Vollsätndigkeit?**

  Eine Klasse ist substrukturvollständig, falls für je zwei Strukturen A, B und für alle Teilmengen der Trägermengen C von A und B gilt, dass A und B elementar äquivalent über C sind.

- **Was bedeutet Modellvollständig?**

  Eine Klasse ist modellvollständig, wenn für alle Strukturen A,B wobei die Trägermenge von A in B enthalten ist gilt, dass A eine elementare Substruktur von B ist.

- **Was kann man über die Substruktur-vollständigkeit aussagen, wenn die Klasse QE erlaubt?**

  Die Klasse ist dann substruktur-vollständig und somit auch modellvollständig.

2.2 Einige einfache QE-Verfahren

- **Erlaubt die Klasse der nichtleeren Menge über der leeren Sprache QE?**

  Nein, denn die Unterklasse $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$ erlaubt keine QE.

- **Erlaubt die Klasse der unendlichen Mengen über der leeren Sprache die QE?**

  Ja. Sie ist somit substruktur-vollständig, vollständig und entscheidbar.

- **Was muss man zur Sprache hinzufügen, damit auch die Klasse der nichtleeren Mengen QE erlaubt?**

  Prädikate C_n für $n \geq 2$, die aussagen, dass eine Menge mindestens n verschiedene Elemente besitzt. Dann ist die Klasse vollständig und entscheidbar.

- **Erlaubt die Struktur $(\mathbb{R}, <)$ QE?**

  Ja. $\mathbb{R}$ besitzt ein QEV und ist entscheidbar.

- **Wie kann man die Erkenntnise, die man aus $(\mathbb{R}, <)$ gewinnt verallgemeinern?**

  Die Klasse der dichten Ordnungen ohne Endpunkte besitzt ein QEV, ist entscheidbar, vollständig und substrukturvollständig.

- **Erlaubt die Struktur $(\mathbb{N}, <)$ QE?**

  Nein. Die Formel
  $$\forall x(x = y \vee y < x)$$
  definiert die Menge 0. Jede atomare Formel mit höchstens einer Variable ist äquivalent zu $false$, $true$, $y = y$ und $y < y$.

- **Was muss man zur Sprache hinzufügen, damit $\mathbb{N}$ QE erlaubt?**

  Eine Konstante 0 und die Nachfolgerfunktion s. Dann besitzt $(\mathbb{N}, 0, s, <)$ QE, ist somit substruktur-vollständig, vollständig, entscheidbar.

- **Welche Schlussfolgerungen kann man aus der existenz eines QE-Verfahrens für $(\mathbb{N}, 0, s, <)$ ziehen?**

  Die Klasse der diskreten Ordnungen mit Anfangspunkt ist über der Sprache $(0, s, <)$ substruktur-vollständig, vollständig und entscheidbar.

- **Welche Strukturen stehen ausserdem in der Klasse der diskreten Ordnungen mit Anfangspunkt?**

  $(\mathbb{N} + \mathbb{Z}, 0, s, <)$, $(\mathbb{N} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}, 0, s, <)$.

- **Ist die Struktur $(\mathbb{N} + \mathbb{N}, 0, s, <)$ ebenfalls in der Klasse der diskreten Ordnungen mit Anfangspunkt?**

  Nein, denn sie besitzt zwei "Anfangspunkte"?

- **Exsistier ein QEV für die Struktur $(\mathbb{Z}, 0, s, <)$?**

  Ja. Das QE-Verfahren läuft analog zu den diskreten Ordnungen mit Anfangspunkt.

- **Besitzt die Struktur $(\mathbb{R}, 0, +, -)$ ein QEV?**

  Ja. Die Struktur ist damit entscheidbar.

- **Wie sehen die Terme in $(\mathbb{R}, 0, +, -)$ aus?**

  Das sind Linearformen mit ganzzahligen Koefizienten.

- **Welche Schlussfolgerungen kann man aus der existenz eines QE-Verfahrens für $(\mathbb{R}, 0, +, -)$ ziehen?**

  Die Klasse der nichttrivialen, torsionsfreien, teilbaren abelschen Gruppen ist damit substrukturvollsändig, vollständig und entscheidbar.

- **Welche anderen Strukturen gehören zu der Klasse der nichttrivialen, torsionsfreien, teilbaren abelschen Gruppen?**

  Additive Gruppen der rationalen Zahlen. Für eine beliebige nichtleere Menge I die Produkte $\mathbb{Q}^I$, $\mathbb{R}^I$. Speziell die reellen Funktion und auch die Unterklasse der stetigen Funktionen.

- **Ist die Klasse aller unendlichen, teilbaren abelschen Gruppen mit einer Prim-Torsion vollständig?**

  Ja. Vollständig und entscheidbar.

- **Erlaubt die Struktur $(\mathbb{R}, 0, +, -, <)$ QE?**

  Ja. Sie ist somit entscheidbar.

- **Wie sehen die definierbaren Mengen in $(\mathbb{R}, 0, +, -, <)$ aus?**

  Die leere Menge, $\mathbb{R}$, $\{0\}$, $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$.

- **Welche Schlussfolgerungen kann man aus der existenz eines QE-Verfahrens für $(\mathbb{R}, 0, +, -, <)$ ziehen?**

  Die Klasse aller nichttrivialen, teilbaren geordneten abelschen Gruppen ist entscheidbar, vollständig und substrukturvollständig.

- **Welche anderen Strukturen gehören zu der Klasse der nichttrivialen, geordneten, teilbaren abelschen Gruppen?**

  $(\mathbb{R}^n, 0, +, -, <)$, $(\mathbb{Q}^n, 0, +, -, <)$ mit den komponentenweisen Operationen und der lexikographischen Ordnung.

- **Welche Anwendungen von der QE in nichttrivialen, teilbaren geordneten abelschen Gruppen kennen Sie?**

  Lineare Optimierung.

- **Wenn man die Optimalitätskriterien definitionsgemäß aufschreibt, so ist das relativ inifizient. Wie kann man lineare Optimierungsprobleme mit QE anders lösen?**

  Durch das Einführen einer Kunstvariablen.

- **Erlaubt die Struktur** $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, <)$ **QE?**

  Nein. Die Formel $\exists x(x + x = y)$ definiert die Menge der geraden ganzen Zahlen. Die atomaren Formeln mit einer Variablen definieren nur die Mengen $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, $\emptyset$, $\mathbb{Z}$ und die boolschen Kombinationen davon. Diese können aber die obige Menge nicht definieren.

- **Was muss man hinzufügen, damit** $\mathbb{Z}$ **QE erlaubt?**

  Die Kongruenzen mit festen Modui. Dann ist die Struktur entscheidbar, substrukturvollständig und vollständig.

- **Wenn man eine zweistellige Operation** $|$ **in** $\mathbb{Z}$ **einführt, ist** $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, <, |)$ **entscheidbar?**

  Nein. Man kann mittels $|$ den Graphen der Multiplikation einführen.

- **Ist** $(\mathbb{N}, +, *)$ **entscheidbar?**

  Nein nach dem gödelschen Vollständigkeitssatz.

- **Wie sehen die definierbaren Mengen in der Presburger Arithmetik aus?**

  Das sind die fast periodischen Mengen.

- **Wie kann man die Presburger Arithmetik anwenden?**

  Ganzzahlige lineare Optimierung. Verifikation von Schleifenprogrammen.

- **Erlaubt die Struktur** $(A, \emptyset, M, \cap, \cup, \sim, \subseteq)$ **QE?**

  Wenn $|M| \geq 3$ nein. Die Formel

  $$\exists x(\neg(0 = x) \wedge \neg(x = y) \wedge x \leq y)$$

  definiert die Menge

  $$N = \{B \mid B \subseteq M, |B| \geq 2\}$$

  Die einzigen Formeln mit einer Variablen sind $true$, $false$, $y = 0$, $y = 1$. Somit sind die definierbaren Mengen $\emptyset$, A, $\{\emptyset\}$,$\{M\}$, $\{B \mid B \subseteq M, B \neq M, \emptyset\}$, sowie die Vereinigungen dieser Mengen. Keine stimmt mit N überein.

- **Was muss man zur Sprache hinzufügen, damit die Struktur QE erlaubt?**

  Man fügt neue atomare Relationen $<_n$, für die gilt

  $$B <_n C \Longleftrightarrow B \subseteq C \vee |C \setminus B| \geq n$$

  Dann besitzt die Struktur ein QEV und ist entscheidbar.

- **Welche Folgerungen kann man aus der Existenz der QE für obige Struktur schliessen?**

  Die Klasse der atomaren Boolschen Algebren ist substrukturvollständig, aber nicht vollständig. Atomare Sätze haben in unterschiedlichen Substrukturen unterschiedliche Egebnisse.

2.3 Grundlegende Reelle und Komplexe QE

- **Wie sehen die Terme aus, wenn man die Operation der Multiplikation in die Sprache mitaufnimmt?**

  Beliebige multivariate Polynome.

- **Was ist die semidistributive Darstellung?**

  Darstellung eines multivariate Polynoms bezüglich einer ausgezeichneten Variablen x als univariat mit parametrischen Koefizienten der Form

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

  wobei a_i beliebige Terme ohne x sind.

- **Welcher Unterschied besteht zwischen der normalen Polynomreduktion und der Pseudureduktion nach x?**

  Man muss nicht in den Erweiterungskörper übergehen um die Divisionen durchzuführen. Somit benötigt man keine expliziten Inversenoperation.

- **Ist die irreduzible Form eines Polynoms nach iterierter Anwendung der Pseudoreduktion mit dem selben Polynom eindeutig?**

  Ja. Das Verfahren ist deterministisch.

- **Erlaubt die Struktur $(\mathbb{C}, 0, 1, +, -, *)$ QE?**

  Ja. Nach dem Satz von Tarski.

- **Ist $(\mathbb{C}, 0, 1, +, -, *)$ entscheidbar?**

  Ja. Die einzigen atomaren Sätze sind $true$, $false$, $k1 = 0$.

- **Welche Eigenschaften von $(\mathbb{C}, 0, 1, +, -, *)$ benutzt das Verfahren von Tarski?**

  C ist unendlich, algebraisch abgeschlossen und ein Körper.

- **Welche Schlussfolgerungen ergeben sich aus der Existenz eines QEV für $(\mathbb{C}, 0, 1, +, -, *)$?**

  Die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper ist substrukturvollständig, besitzt ein QEV und ist entscheidbar.

- **Ist die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper vollständig?**

  Nein. Die Atomaren Sätze $1 + 1 = 0$ werden je nach Struktur anders entschieden (z.B. in einem algebraischen Abschluss von Z_2.

- **Wieso ist die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper entscheidbar?**

  Man kann zu jedem Satz eine endliche oder koendliche Teilmenge P der Primzahlen bestimmen, sodass die Gültigkeit des Satzes in einer Struktur dazu äquivalent ist das die Charakteristik des Körpers in P liegt. Ist P koendlich, so gilt der Satz in $\mathbb{C}$.

- **Was besagt das Lefschetz-Prinzip?**

  Gilt ein Satz in $\mathbb{C}$, so gilt der auch in allen algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik 0. Ferner kann man eine Primzahl bestimmen, sodass für alle grösseren Primzahlen p der Satz in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p gilt.

- **Welche Anwendungen der QE für algebraisch abgeschlossene Körper kennen Sie?**

  Man kann zeigen, dass jede injektive polynomielle Abbildung $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ auch surjektiv ist.

- **Können sie den Satz, dass jede injektive polynomielle Abbildung $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ auch surjektiv ist beweisen?**

  Dazu verwendet man die Tatsache, dass jeder Körper der Charakteristik p den Z_p als Unterkörper hat, und jede endliche Teilmenge eines Körpers mit Charakteristik p in einem Unterkörper mit der selben Charakteristik enthalten ist. Man führt die Aussage auf einen Körper der Charakteristik p zurück und führt die Gegenannahme mit Hilfe vom Lefschetz-Prinzip zum Widerspruch.

- **Was ist das kombinierte Vorzeichenverhalten?**

  Für reelle univariate Polynome ist das eine Matrix, die für jedes Polynom einzeln den Vorzeichenwechsel in den Zeilen beschreibt, und ausserdem die Vorzeichenwechsel aller Polynome Spaltenweise gegenüberstellt.

- **Wie kann man die KVV-Matrix berechnen?**

  Für konstante oder lineare Polynome per Hand. Dann gibt es eine Rekursionsvorschrift, die aus

$$KVV(g_1, ..., g_n, f', f_0, ..., f_n, q_0, ..., q_n)$$

  die Matrix

$$KVV(f, g_1, ..., g_n, f', f_0, ..., f_n, q_0, ..., q_n)$$

  berechnet. Daraus ergibt sich durch Verdichten der Matrix die gesuchte Vorzeichenwechseltabelle.

- **Erlaubt die Struktur $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, *)$ QE?**

  Nein. Die Formel

$$\exists x(x^2 = y)$$

  beschreibt die Menge der positiven reellen Zahlen. Jede quantorenfreie Menge mit einer Variablen allerdings kann nur die Mengen $\emptyset$, $\mathbb{R}$ oder eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ da die Erfüllungsmengen einzelner atomarer formeln Nullstellen von Polynomen sind.

- **Was muss man hinzufügen, damit $\mathbb{R}$ mit der Multiplikation die QE erlaubt?**

  Ein Ordnungsrelation. Dann besitzt $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, *, <)$ ein QEV.

- **Wie kann man zeigen das für $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, *, <)$ ein QEV existiert?**

  Der Beweis läuft raus auf die Berechnung einer quantorenfreien Formel für
  $$\exists x(\bigwedge_{i=0}^{n} f_i \rho_i 0)$$
  Dann kann man algorithmisch die eine erweiterte Formel konstruieren, die genau dann gilt, wenn für bestimmte Werte gilt, dass die $KVV(f_i) = E$ ist. Das es endlich viele davon gibt, ist die Disjunktion dieser Formeln äquivalent zu der quantorenfreien Formel von oben.

2.4 Effiziente lineare und quadratische Reelle QE

- **Was ist die Schwäche der einfachen QE-Verfahrens?**

  Die Berechnung der DNF. Bei einem Quantorenwechsel läuft es darauf hinaus, dass man möglicherweise CNF in DNF umrechnen muss, was exponentielle Laufzeit hat.

- **Wann ist ein Algorithmus elementar rekursiv?**

  Wenn seine Laufzeit und Speicherbedarf für ein festes n mit der Eingabe der Länge l durch $exp_n(l)$ fixsiert ist.

- **Welche Laufzeitkomplexität haben die einfachen QE-Verfahren?**

  Die sind nicht elementar rekursiv.

- **Was ist ein linearer Term?**

  Ein linearer polynomieller Term in Distributivdarstellung enthält in jeder Teilsumme nur eine lineare Variable mit dem Exponenten 1.

- **Wie muss man die Rekursionsvorschrift für die Bildung von Termen einschränken?**

  Ist t ein linearer Term und s ein Term mit $V(s) \cap LinVar = \emptyset$ dann ist st auch ein linearer Term.

- **Welche Eigenschaften haben die linearen Terme?**

  Abgeschlossen bzg. der Substitution von linearen Termen für lineare Variablen.

- **Welche Mengen definieren die reellen linearen atomaren Formeln mit schwachen Ungleichungen, wenn man alle Variablen ausser der Quantifizierten fixiert?**

  Das sind $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $(-\infty, \frac{b_i}{a_i}]$, $[\frac{b_i}{a_i}, \frac{b_j}{a_j}]$ und $[\frac{b_i}{a_i}, \infty)$.

- **Für welche Formeln wird das QE-Verfahren für schwache lineare Ungleichungen angegeben?**
  $$\exists x \varphi(x)$$
  wobei $\varphi(x)$ eine beliebige Kombination von $\vee$, $\neg$ und $\wedge$ von atomaren Formeln.

- **Wie definiert man für lineare schwache Ungleichungen die modifizierte Substitution?**
  $$\varphi[\frac{b_j}{a_j}//x] = a_i a_j b_j \leq b_i a_j^2$$

- **Wie sieht dann das QEV für lineare schwache Ungleichungen aus?**

$$\exists\varphi(x) \iff \varphi[0/x] \vee \bigvee_{j\in J} (\varphi[\frac{b_j}{a_j}//x] \wedge (a_j < 0 \vee a_j > 0)))$$

- **Warum kann man das QEV für lineare schwache Ungleichungen iterativ anwenden?**

  Die entstehenden Formeln sind wieder schwache Ungleichungen.

- **Wie sind die Laufzeiten des Verfahrens für schwache lineare Ungleichungen?**

  Polynomiell in der Länge der Formeln. Einfach exponentiell in der Anzahl von Quantoren.

- **Was ist eine QE mit Antworten?**

  Ein QEV mit der Ausgabe, die aus einer Liste von Einträgen der Form